

Allgemeines zum Messen/Kalibrieren:

Messen heißt vergleichen

Kalibrieren: Feststellen des für ein Messsystem gültigen
Zusammenhangs zwischen

angezeigtem und richtigem Wert

Das erfordert eine

(messtechnische) Rückverfolgbarkeit, Rückführung (traceability)

Die Eigenschaft eines Messergebnisses muß durch eine ununterbrochene Kette von Vergleichsmessungen mit angegebenen Messunsicherheiten auf geeignete Normale, im allgemeinen internationale oder nationale Normale (Maßeinheiten), bezogen zu sein.

Messwert :

100 Ohm

was fehlt hier ?

Die Messunsicherheit !

Es muß heißen:

Messwert :

$100 \text{ Ohm} \pm 1 \text{ Ohm}$

Zu einem Messwert gehört eine Messunsicherheit
Nur so ist ein sinnvolle Anwendung möglich.

Wie kommt man zu Messwert und Messunsicherheit?

Wie gemessen wird, das bestimmen der Prüfling,
die zu ermittelnde Messgröße und
das Normal, was eingesetzt wird.

Welchen Wert die Messunsicherheit hat,
bestimmen auch wieder der Prüfling,
die Messgröße und das Normal.
Zusätzlich sind zum Beispiel Fehleranteile des Aufbaus und
statistischen Einflüsse zu beachten.

Ein kleines Beispiel:



Messbrücke für
Widerstände

Prüfling: Widerstand

Messgröße: Widerstand in
der Einheit Ohm

Normal: Messbrücke

Fehleranteile für die
Messunsicherheit?

Die Messunsicherheit besteht in diesem Fall aus zwei Anteilen!

Welche ?

Die Unsicherheit des Normal und die der Messung selbst.

Wieso der Messung ?

Einmal messen genügt nicht, denn das Ablesen der Skala und die Einstellung der Brücke auf den Nullwert ist ungenau und nicht reproduzierbar, ähnlich den Schwankungen/Rauschen bei Digitalanzeigen.

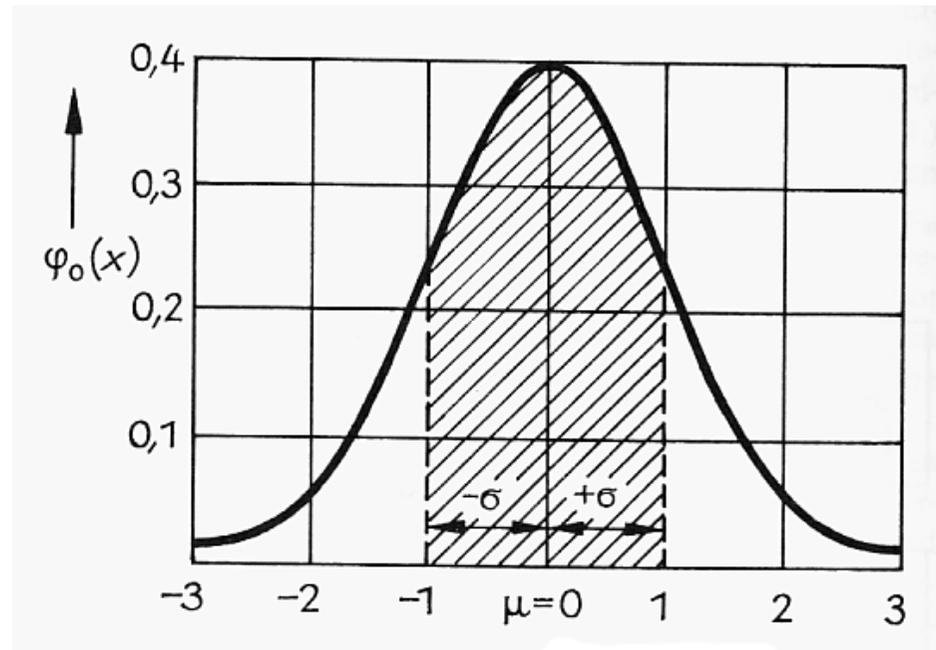
Dazu etwas Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung !

Die Wahrscheinlichkeit, dass ich bei häufigem Ablesen immer genau den selben Wert erreiche ist gleich Null.

Es gibt eine Streuung σ der Einzelergebnisse nach +/-.

Die aus einer Messreihe mit vielleicht 200 Messungen ermittelten Werte ergibt im Idealfall eine standardisierte gaußförmige Normalverteilung.

Erwartungswert $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ und Gesamtfläche=1 (normiert)
 $\varphi_0 =$ Verteilungsdichte



Das heißt, das vom berechneten Mittelwert Ergebnisse gleichverteilt kleiner und größer sind, wobei die meisten Einzelwerte (Anzahl) im Bereich des Mittelwerts liegen und große Abweichungen nur selten vorkommen.

Im Messfall habe ich nur wenige Stichproben z.B. $n=6$,
dann gilt für die Berechnung des Mittelwerts und der Standardabweichung

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} * \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j} \quad (1)$$

$$\sigma \simeq s_i(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i-1} * \sum_{j=1}^{n_i} (x_{i,j} - \bar{x}_i)^2} \quad (2)$$

Der Mittelwert (\bar{x}) ist die Summe aller Ergebnisse (x) geteilt durch deren Anzahl (n).

Die Standardabweichung (s) ist die Summe der Differenz von Mittelwert und Einzelwerten zum Quadrat geteilt durch die Anzahl-1. Davon wird noch die Wurzel gezogen. Sie ist ein Maß für die Streuung der Werte.

Der Mittelwert ist dann mein Messergebnis aus mehreren Einzelmessungen !

Die Standardabweichung ($s=\sigma$) wäre die Messunsicherheit, wenn wir nur 68,3% der Fehler einschließen würden. Die gestrichelte Fläche beträgt 68,3% der Gesamtfläche aller möglichen Ergebnisse unter der Gaußkurve.

Die Norm für die Messunsicherheitsberechnungen verlangt eine Abdeckung von etwa 95% aller Ergebnisse !

Dies ist bei $\sigma = 2$ mit 95,44% der Fall.

Deswegen gilt für eine Messung mit zufälligen Fehlern die erweiterte Messunsicherheit:

$$U = k * \frac{s_i(x_i)}{\sqrt{n}} = k * u_i(\bar{X}_i) \quad (3) \quad \text{mit } K=2$$

(Erweiterungsfaktor/coverage factor)

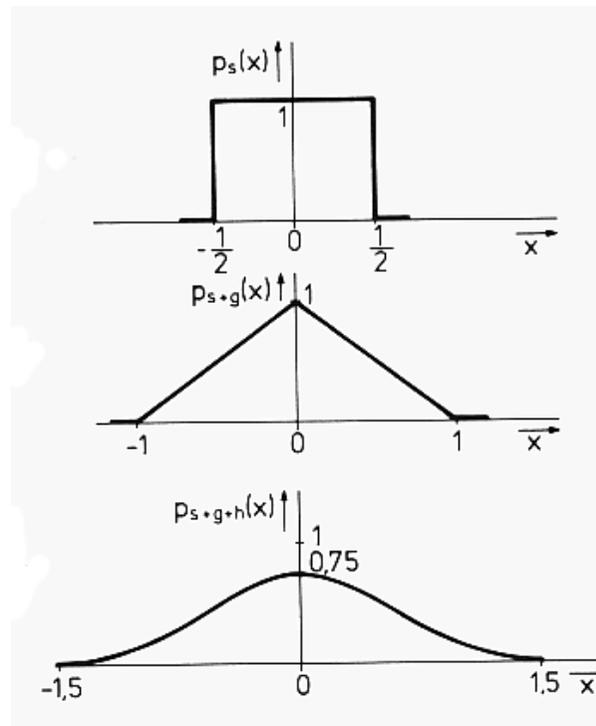
Der Term $\frac{1}{\sqrt{n}}$ berücksichtigt, dass wir nur eine endliche Anzahl von Messungen haben und erhöht, je kleiner n wird, die Messunsicherheit.

$$k=2=t \text{ (Studentfaktor) bei } n=60 \text{ [95\%]} \quad \frac{t}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

$$\text{genau: } t=2,57 \text{ bei } n=6 \Rightarrow \frac{2,57}{\sqrt{6}} = 1,04 \quad \text{///} \quad \frac{2}{\sqrt{60}} = 0,26$$

Die Messbrücke selbst hat auch eine Messunsicherheit.

Messunsicherheitsangaben setzen sich meist aus mehreren Unsicherheitsanteilen zusammen und sind daher in Summe normalverteilt. (math. Faltungsintegral) .



alle Flächen = 1
(normiert)

Für das Gerät selbst wird für die Fehlergrenzen eine Rechteckverteilung angenommen.

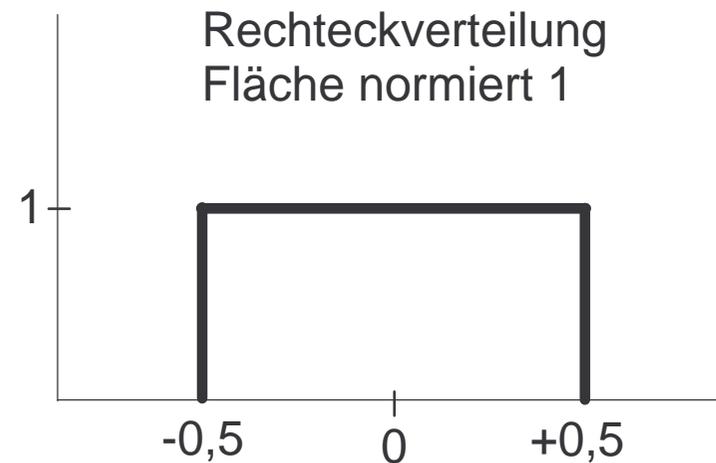
Dann gilt für die Standardmessunsicherheit (**kl. u**)

$$U_{Ri} = \frac{a_i}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

$$a = \frac{x_+ - x_-}{2} \quad (6) \quad \text{mit } -x_- \text{ negativ !}$$

Es werden alle Werte zwischen den beiden Grenzen als gleich wahrscheinlich angesehen.

Hier: $x_+ = 0,5$ und $x_- = -0,5 \Rightarrow a = 1/2$



In vielen Fällen wird die Rechteckverteilung benutzt. Sie ergibt etwas höhere Messunsicherheiten in Gleichung (9) als die Gaußunsicherheit.

bei:

- Einzelwerten
- Drift
- Messaufbaueffekten (auch Temperatur)
- Spezifikationen

Bsp: **Fehlergrenzen:** $1,000 \text{ V} \pm 1 \text{ Digit (1mV)}$ $\Rightarrow a = \frac{1}{2} * 2mV = 1mV$
oder 0,1 % mit Gl. (6)

Auflösung: $1,000V$ von $1mV$ $\Rightarrow a = \frac{1}{2} * 1mV = 0,5mV$
oder 0,05%

Für Messwerte (Ergebnisse) aus Kalibrierscheinen gilt die Gaußverteilung:

$$U_{Kal} = k * u_{Kal} \quad (7)$$

Für die **erweiterte** Gesamtunsicherheit (**gr. U**) gilt:

$$U = k * \sqrt{\sum u^2} \quad (8)$$

$$U = 2 * \sqrt{\frac{U_{Kal}^2}{4} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n_a} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n_s} u_i (\bar{x}_i)^2} \quad (9)$$

U immer positiv angeben und in Tabellen ohne \pm

Auf Grund der oben gemachten Berechnungen erscheint der folgende Text in den Kalibrierscheinen bei den Messunsicherheiten:

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor k=2 ergibt. Sie wurde gemäß DKD-3 ermittelt. Der Wert der Messgröße liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% im zugeordneten Werteintervall. Die angegebene Messunsicherheit setzt sich zusammen aus den Unsicherheiten des Kalibrierverfahrens und der verwendeten Normale. Ein Anteil für die Langzeitstabilität des Kalibriergegenstandes ist darin nicht enthalten.

Wie komme ich zu den Unsicherheitsteilen ?

Nach GUM mit einer Modellgleichung

Modellgleichung enthält alle drei Anteile

Das sind:

die **Unsicherheiten**

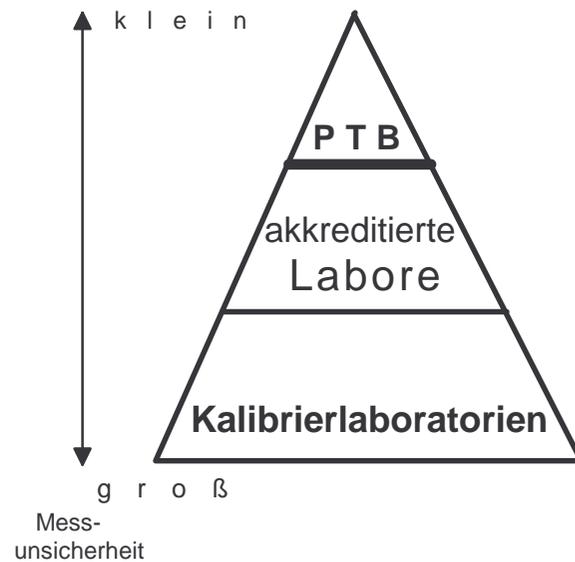
die Abweichungen bzw. Korrekturen
(Sensitivitätskoeffizienten)

die Messwerte

GUM=Guide to the expression of uncertainty in measurement

Überschlagsrechnung nicht mit GUM Modell (einfacher aber auch richtig)

Aufwand für Messunsicherheitsberechnungen



Je kleiner die Messunsicherheit
desto größer der
Aufwand bei der Kalibrierung und
Berechnung

Im DAKKS-Labor werden auch kleinste
Unsicherheitseinflüsse betrachtet und das
nur mit der Modellgleichung.

Weiter Begriffe:

Messabweichung (der Anzeige) (error of indication)

bei der Messung festgestellter Wert minus richtigem Wert einer Messgröße

Richtiger Wert = „festgestellter Wert“ minus „Messabweichung“

Beispiele:

Anzeigendes Messgerät (DVM) [P]

festgestellter Wert = angezeigter Wert (Anzeigewert/Messwert)

richtiger Wert = angebotener Wert (zB. von Kalibrator) [N]

Bereitstellendes Messgerät (Kalibrator) [P]

festgestellter Wert = eingestellter Wert (Eingestellter/Angelegter Wert)

richtiger Wert = abgegebener Wert (zB. von Präzisions-DVM) [N]

Messunsicherheit [uncertainty of measurement]

Kennwert, der mit dem Messergebnis beigeordnet ist und den Bereich der Werte charakterisiert, die der Messgröße (aufgrund der über die Messung vorhandenen Kenntnisse) vernünftigerweise zugeordnet werden können.

Bei der Schätzung der Messunsicherheit müssen alle Unsicherheitskomponenten, die für den betreffenden Fall von Bedeutung sind, in Betracht gezogen werden, wobei angemessene Auswerteverfahren zu verwenden sind.

Messunsicherheit

Gilt für die Kalibrierung eines bestimmten Gerätes

Gilt nur zum Zeitpunkt der Kalibrierung

Umfasst: Die Messunsicherheit (das Verhalten) des Prüflings
während der Kalibrierung

Die Messunsicherheit des Normal

Die Messunsicherheit des Kalibrierverfahrens

Ist erforderlich um die Konformität (einhalten der Spezifikationen)
eines Prüflings zu ermitteln

Rückführbarkeit (Traceability)

Ein minimale Meßunsicherheitsverhältnis zwischen Prüfling und Normal sollte bei den Messungen möglichst eingehalten werden. Da die Meßunsicherheit moderner Meßgeräte immer geringer werden, sind die folgenden Forderungen gelegentlich nicht zu erfüllen. Dies erfordert dann aufwendigere Meßunsicherheitsberechnungen.

Es gilt:

Für mechanische Anwendungen: 10:1

Für elektrischen Anwendungen (HF):
zwischen 4:1 und 1:1

Für elektrischen Anwendungen (NF):
4:1 (MIL-STD 45662A)

Auflösung / Meßunsicherheit

Die Auflösung (rechteckverteilt) gibt den kleinsten darstellbaren Wert eines Meßinstrumentes an.

Die Meßunsicherheit gibt den Fehler an, mit dem ein Meßinstrument einen Meßwert anzeigt. Sie ist in der Regel schlechter als die Auflösung.

Betrachtungen der möglichen Meßunsicherheitsanteile

Um die Gesamtmeßunsicherheit für eine Messung zu ermitteln, muß man die Fehlereinflüsse, die bei der Messung auftreten, kennen oder bestimmen. Erst dann kann man die Modellgleichung bzw. die Meßunsicherheitsformel aufstellen.

Meßgeräte

Hierzu gehören Normal und Prüfling. Beim Normal ist die eigene Meßunsicherheit, die auch der Spezifikation des Gerätes entsprechen kann, aber auch die Rekalibrierungsfristen zu beachten. Bei beiden ist die Standardabweichung durch Mittelung, die Auflösung (z.B. Anzeige [Digit]) und Rauscheinflüsse von Bedeutung.

Einflüsse:

Rekalibrierintervall

Gerät innerhalb vorgegebener Grenzen

Alterungseinflüsse, Drift, Abnutzung etc.

Interne und externe Abgleiche

Abgleich: täglich oder in periodischen Abständen

PC-gesteuerte Messgeräte - oft Selbstkalibrierrouinen

Umgebungsbedingungen

Zu den Umgebungsbedingungen gehören Temperatur, Luftdruck, Luftfeuchte aber auch Netzstörungen/EMV. Der Haupteinfluss auf Normale ist in unserer Praxis die Temperatur. Gelegentlich lassen sich die Wirkungen der Einflüsse (z.B. Temperaturkoeffizient) bestimmen um so die Meßwerte zu korrigieren.

Temperatur

Abhilfe durch geeignete Thermoskalierung des Messraumes oder von Teilen der Messeinrichtung

Luftdruck und Luftfeuchte

Feuchte bei Kapazitäten , Hochspannungsmessungen (Durchschlag)

Leckströme bei hohen Impedanzen

Luftdruck bei Temperaturmessung (kochendes Wasser (100°))

Netzstörungen /EMV

leitungsgebundene Störungen

elektromagnetische Felder

Störungen durch vermehrten Einsatz von PCs/Schaltnetzteilen

Messaufbau

Dem Messaufbau wird zu Unrecht oft zu wenig Beachtung geschenkt.

So ist Schutzschirmtechnik (Guard-Technik) geeignet den Einfluß von Gleichtaktspannungen herabzusetzen.

Ein- und Ausgangsimpedanzen sind häufig Quellen von unbekanntem Abweichungen. Das können belastete Teiler, Reflexionsfaktoren bei HF-Messungen (sehr starker Einfluß) und frequenzabhängige Impedanzen (Oszilloskope) sein.

Leitungs- und Kontaktwiderstände wirken sich grundsätzlich auf Messungen aus. Allerdings ist der Einfluß unterschiedlich groß. So müssen aus diesem Grund Widerstände unter 1M Ω bei Präzisionsmessungen immer vierpolig angeschlossen werden. Für Strommessungen sind dicke Kabel zu verwenden. Bei HF-Messungen sind den Steckern / Buchsen und Adapter, sowohl mechanisch wie elektrisch eine große Beachtung zu schenken. Daß die Dämpfung bei HF-Kabel mit zunehmender Frequenz und Länge stark ansteigt sollte bekannt sein.

Messaufbau

Isolationswiderstände wirken sich negativ bei der Messung hoher Widerstände und kleiner Stromstärken aus. Sie liegen parallel zu dem zu kalibrierenden Widerstand oder speisen Leckströme ein. Speziell isolierte Kabel sowie Schutzschirme mindern die störenden Einflüsse. So ist bei Messungen über 10 kOhm unbedingt eine Berührung unserer Standardmesskabel zu verhindern.

Auch die Leitungsführung (möglichst kurze Meßkabel, keine Schleifen, nicht über Netzleitungen führen), die Schirmung (abgeschirmte Leitungen für störempfindliche Signale verwenden) und die Erdung (nur an einer Stelle erden, stern- oder baumförmig, um Erdschleifen zu vermeiden) sind Maßnahmen zur Verringerung der äußeren Störeinflüsse. So sind auch die Nullkapazitäten bei LCR-Meßbrücken stark von den Anschlussleitungen und deren Lageveränderung abhängig. Gerätenetzspeisung nur aus einer Phase möglichst eine Steckdosenleiste.

Erdung der Netzkabel (Schutzleiter) problematisch !
Verringerung des Einflusses äußerer Störungen
große Leiterschleifen und große Koppelkapazitäten vermeiden

Messaufbau

Thermospannungen entstehen bei Temperaturgradienten oder bei Paarungen unterschiedlicher Materialien (z.B Kabelstecker-Anschlussbuchsen) auf. Sie können unter Umständen durch eine "Nullmessung" ermittelt und korrigiert werden. Fast ganz vermeiden lassen sie sich durch reine Kupferverbindungen.

Beispiele von Thermospannungswerten: **Kupfer an in ca. $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$**

Kupfer	0,3
Gold,Silber	0,5
Zinn-Bleilot	5
Kupfer-Oxyd	1000

Rauschen(quellen)

z. B. integrierte Schaltungen, Schaltnetzteile,
Chooperverstärker und sehr hochohmige Widerstände

Beobachter

Dem Beobachter (Kalibrierer) können Ablesefehler oder Übertragungsfehler passieren. Hier sind die digitalen Meßgeräte weniger betroffen als die Analogen. Auch der Rechner, der Meßwerte ausliest und bearbeitet, ist ein Beobachter. Jedoch lassen sich Fehler in rechnergesteuerten Meßplätzen durch vorheriges aufwendiges Testen leichter vermeiden. Dabei sollte jedoch auf die gute Bedienbarkeit Wert gelegt werden, damit sich nicht doch unnötige Fehler einschleichen. Der Bediener des Programms sollte trotzdem die Ergebnisse auf Plausibilität überprüfen, als zusätzliche Kontrolle.

Auch die Person selbst übt unbewußt gelegentlich Einfluss auf die Messergebnisse aus. So erzeugt das Anfassen von Kontakten und Thermistoren Thermospannungen, die nicht zu unterschätzen sind. Auch elektrische (elektrostatische Entladung) Ladungsänderungen durch Bewegung bei hochohmigen Messungen lassen beliebige Ergebnisse zu. Grundsätzlich beeinflusst der Mensch alle elektrischen Raumfelder in irgend einer Weise (Antenne).

und nun ?

Wenn man sich über die relevanten Fehlereinflüsse klar ist, muss man sie an Hand von Unterlagen oder der Erfahrung als Zahlenwert bestimmen.

Was sind Erfahrungen?

Das ist, wenn man weiß was man tut und was so alles dabei passieren kann. Diese "Passieren" ist durch Probemessungen z.B. durch Änderung der Anschlußtechnik zu verifizieren.

Form der Messunsicherheitsangaben

Relative Meßunsicherheitsangaben

Relative Meßunsicherheitsangaben sind dimensionslos und werden teils in Prozent oder ppm (parts-per-million) angegeben.

$1 \cdot 10^{-2}$	1%	10 000ppm
$1 \cdot 10^{-3}$	0,1%	1 000ppm
$1 \cdot 10^{-4}$	0,01%	100ppm
$1 \cdot 10^{-5}$	0,001%	10ppm
$1 \cdot 10^{-6}$	0,0001%	1ppm

Die Angaben der Einheiten und Messunsicherheiten im Kalibrierschein sind in folgender Form erlaubt:

In der Überschrift (z.B.): Leistung in W
oder $\frac{\text{Leistung}}{W}$ auch Leistung/W (Bruch)
oder mit $\frac{\text{Formelzeichen}}{\text{Einheit}}$
Formelzeichen und Einheiten sind genormt!

Direkt beim Meßwert (z.B.): $100 \cdot (1 \pm 1\%) \text{ Ohm}$
oder $100 \cdot (1 \pm 1 \cdot 10^{-2}) \text{ Ohm}$
oder $(100 \pm 1) \text{ Ohm}$
oder $100 \text{ Ohm} \pm 1 \text{ Ohm}$

Das bedeutet das der Meßwert zwischen 99 Ohm und 101 Ohm liegen kann.

Bsp: $100 (1 \pm 1 \%) \text{ Ohm} \Leftrightarrow 100 \cdot 1 \text{ Ohm} \pm 100 \cdot 1/100 \text{ Ohm}$

Die **Spezifikationen** des Prüflings sind nicht immer direkt ersichtlich.

Hilfe durch Berechnungen des Herstellers z.B. in den Performance-Test oder Originalkalibrierscheinen, aber auch im Gerät abrufbar (zB. FL5700) !!

Auch auf das Kleingedruckte kommt es an

Das übliche Grundmuster :

$\pm(F[\text{reading}])$ <i>[Messwert]</i>	$+G[\text{range}]$ <i>[Bereich]</i>	$+ \text{Floor}$ <i>Rauschen</i>
---	--	-------------------------------------

oder

$\pm (F[\text{setting}])$ <i>[Einstellung]</i>	$+ G[\text{range}]$ <i>[Bereich]</i>	$+ \text{Floor}$ <i>Rauschen</i>
---	---	-------------------------------------

Rauschen: z.B.: $\pm \text{Digit}$ oder C_0 (Nullkapazität)

Mit Digit kann auch die Auflösung gemeint sein.

Bei einigen Geräten sind die Angaben etwas dürftig, dann kommt die Frage !

Messunsicherheit ?

% vom Bereich?/Messwert?

oder

% vom Endwert?

$$G[\text{Bereich}] = 0.001\% \text{ (10 ppm)}$$

$$\text{Bereich} = 10 \text{ V}$$

$$\text{Endwert} = 20 \text{ V}$$

$$G[\text{Bereich}] \text{ (in Volt)} = 0.001\% \cdot 10\text{V} = \mathbf{100 \mu\text{V}}$$

$$G[\text{Endwert}] = 0.001\% \cdot 20\text{V} = \mathbf{200 \mu\text{V}}$$

Immer Endwert wenn nicht angegeben.

Die Spezifikationen

Werden vom Hersteller publiziert

Garantieren die Eigenschaften eines Messgerätes

Sie gelten für alle Geräte einer Messgerätetype

Beispiel: Digitalmultimeter F87, 3458A etc.

Gelten für einen bestimmten Zeitraum

Beispiel: 24h, 90Tage, 1Jahr

Gelten unter bestimmten Umgebungsbedingungen

Beispiel: 23°C +-5°C

Primärspezifikationen

Kalibrierunsicherheit
Rückführbarkeit
Stabilität
Kurz- und Langzeiteffekte
Auflösung

Sekundäre Spezifikationen

Temperaturkoeffizient
Netzregulierung
Lastregulierung
Ohmsche Last
Kapazitiv Last
Induktiv Last
Linearität

Die Grundgenauigkeit LCR Brücke ESI von 0,02% ist sehr niedrig

und mit Einschränkungen/Bedingungen gültig:

Nur bei 1kHz nicht 20 Hz bis 100kHz

Nur bei Messspannungen größer 800mV

Nur bei höchster Messauflösung

Nur bei idealen Umgebungsbedingungen z.B. Temperatur

Nur im eingeschränkten Impedanzbereich (mittlerer)

Nur bei kleinen Verlustfaktoren (C-Messung)

Nur bei optimaler Anschlußtechnik (vierpolig)

So funktioniert Werbung !!!!

Beispiel DVM HP 3458 ohne Option (high stability)
gilt innerhalb 24h nach ACAL

Fehleranteile bei **1V** im 1V Bereich und 1 Jahr

ppm of Calibrationstandards !	2 ppm
ppm of Reading	8 ppm
ppm of Range	1 ppm
ppm of Gain Error (AV=10)	0,2 ppm
ppm of RMS Noise (AV=10)	0,05 ppm
ppm of Temperatur +/- 1Grad	0,25 ppm

Die Unsicherheitsangaben abhängig von den Kalibrierintervallen gelten nur relativ zur Unsicherheit, mit dem das DVM bei 10V und 23°justiert wurde !

HP addiert die Terme linear, daher mehr Sicherheit, obwohl quadratisch möglich wäre.

$$\Rightarrow 1V \pm 0,000\ 0115\ V$$

Wann ist ein Messwert innerhalb der Spezifikationen des Prüflings?

Kein Problem, wenn der Messwert innerhalb der **Grenzen** liegt.

Ein Problem, wenn der Messwert auf der Grenze liegt oder gar außerhalb !

Lösung ?

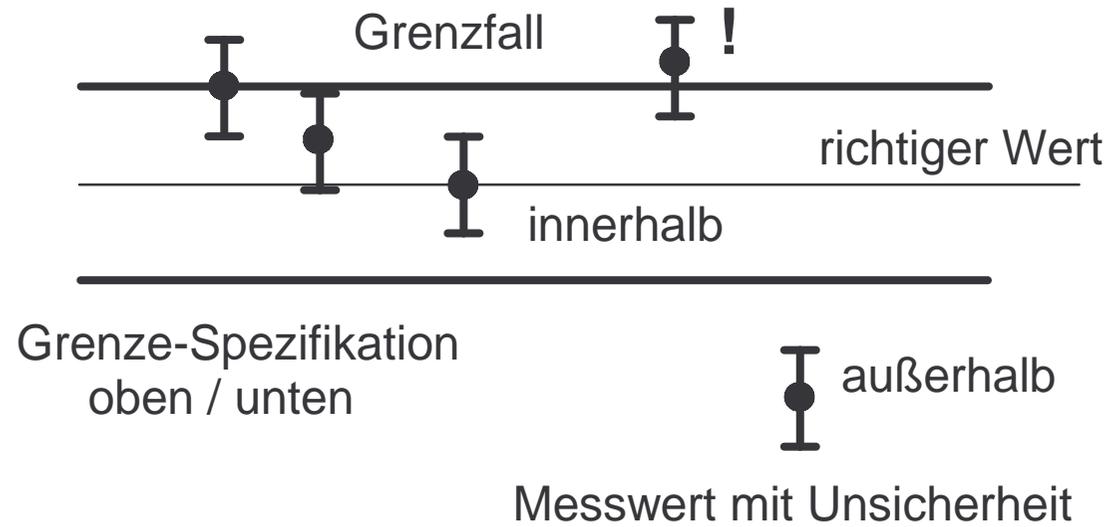
Jetzt kommt unsere Messunsicherheit ins Spiel

Auf der Grenze, Gerät wegen eigener Unsicherheit innerhalb der Spezifikationen !

Außerhalb der Grenzen, dann muß im Einzelfall beachtet werden, ob unsere
Unsicherheit die Grenzen überdeckt,
wenn ja

dann abwägen oder andere Messmethode mit geringerer Messunsicherheit wählen
wenn nicht,
dann auf jeden Fall außerhalb der Spezifikationen

Grenzfälle im Bild



siehe auch Dokument ILAC-G8:1996

Fehlerfortpflanzung (VDE/VDI 2620)

Wenn man die Messunsicherheit hier als Beispiel den Radius kennt, aber die vom Volumen der Kugel wissen will, so kommt die Fehlerfortpflanzung zum Tragen.

Für das Volumen einer Kugel mit dem Radius x gilt:

$$V(x) = \frac{4}{3} * \pi * x^3 \quad (10)$$

Für die Volumenabweichung gilt, wenn der Radius sich um ein Delta verändert:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{4}{3} * \pi * (x + \Delta x)^3 - \frac{4}{3} * \pi * x^3 = \\ &\frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2 \Delta x + 4\pi x \Delta x^2 + \Delta x^3 - \frac{4}{3}\pi x^3 \quad (11) \end{aligned}$$

Der erste und letzte Term kürzen sich weg.

Mit der Ableitung von $V(x)$ nach x folgt mit Δx :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} = 4\pi x^2 \Rightarrow \Delta V_{Ab} = 4\pi x^2 \Delta x \quad (12)$$

Durch Vergleich der Gleichungen ergibt sich:

$$\Delta V = \Delta V_{Ab} + 4\pi x \Delta x^2 + \Delta x^3 \quad (13)$$

Die hinteren beiden Terme sind Fehlerterme, um die die normal verwendete Ableitung "falscher" aber einfacher zu lösen ist, da $\Delta x \neq 0$.

Ein Rechenbeispiel zum Volumen verdeutlicht dies. Es gilt: $x=(12\pm 0,1)\text{m}$ [0,8%]. Mit der genaueren Deltamethode folgt:

$$V = (7238,2 + 196,45 \text{ bzw. } -166,29)\text{m}^3 \quad [+2,7\% \text{ bzw. } -2,2\%]$$

Mit der Ableitungsrechnung:

$$V = (7238,2 \pm 180,95)\text{m}^3 \quad [\pm 2,5\%]$$

Die Differenz auf Grund der Fehlerterme beträgt $1,5\text{m}^3$ das sind etwa 8% vom Volumenfehler und 0,02 % vom Volumenwert daher üblich zu vernachlässigen; besonders, da in der Praxis die Unsicherheiten sehr gering sind.

In vielen Fällen ist dies einfacher:

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{mit } \Delta U \quad \text{und} \quad \Delta I$$

$$\Delta R_{\text{relativ}} = \frac{\Delta R}{R} = \pm \left(\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} \right)$$

Bei einer Gleichung mit Multiplikation/Division ist der gesamte relative Fehler die Summe der einzelnen relativen Fehler.

Widerstände in Reihe: $R = R_1 + R_2$

$$\Delta R = \pm(\Delta R_1 + \Delta R_2)$$

Bei einer Gleichung mit Addition/Substraktion ist der absolute Fehler die Summe der einzelnen absoluten Fehler.

Für die Parallelschaltung von zwei Widerständen gilt:

$$R = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Delta R = \pm \left(\frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} * \Delta R_1 + \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} * \Delta R_2 \right)$$

$$\Delta R_{relativ} = \pm \left(\frac{R}{R_1} * \Delta R_1 + \frac{R}{R_2} * \Delta R_2 \right)$$

Das muß wirklich berechnet werden.

Ende