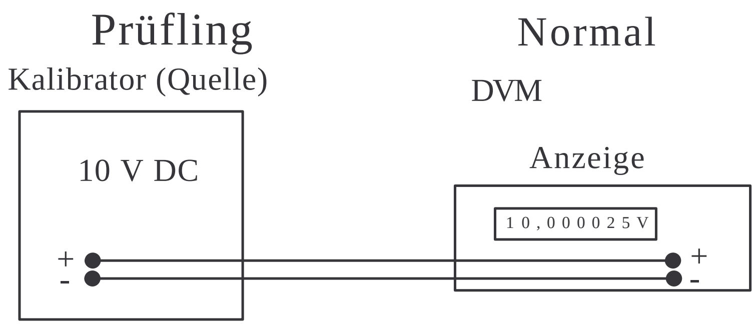
Messunsicherheitsberechnung Beispiele

a) Kalibrierung von Gleichspannungsquellen

Bei dieser Messung wird der Spannungswert eines Prüflings (z.B:Kalibrator) mit dem Meßnormal (A_N) bestimmt. Hierbei wirkt sich die eigene Messunsicherheit des Meßnormals in erheblichem Maße auf die Gesamtmeßunsicherheit aus.

Zur Berechnung des Meßergebnisses und Bestimmung der Meßunsicherheit wird die Modellgleichung benötigt. In ihr werden nicht nur die Meßunsicherheitsterme aufgeführt, sondern gleichzeitig erfolgt hier die Berechnung des Meßwertes. Die einzelnen Terme erscheinen dann in einer Gesamttabelle mit ihren Zahlenwerten.



Es gelten die folgenden Abkürzungen:

U_P: Meßergebnis des Prüflings; Ergebnis der Messung mit Berechnung
$A_{N/P}$: Anzeigewert bei der Messung mit Normal/Prüfling
$\delta Mess$: Unsicherheitsanteil des Messgerätes (9930/Dvm-180Tage)
$\delta CalN$: Messunsicherheit des Spannungsnormals incl. Drift
$\Delta CalN$: Abweichung des Spannungsnormals
δAuf: Auflösung des Messgerätes (Dvm)
$\delta Verf$: Einflüsse durch das Verfahren z.B.Anschlußtechnik
U_{CalN}: Spannungswert des Normals mit Rückführungsunsicherheit (10V) (in Teil b)
c: Sensitivitätskoeffizient (Ableitung der Modellgleichung nach allen Veränderlichen)

Deltas:

Δ Abweichungen mit Korrekturmöglichkeit

δ Messunsicherheitsanteile

$$c_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Für die Modellfunktion gilt:

$$U_P = A_N + \delta Mess + \delta CalN + \Delta CalN + \delta Auf + \delta Verf$$

Für die Bestimmung der Sensitivitätskoeffizienten (c) muß die Gleichung nach allen veränderlichen Variablen abgeleitet werden.

$$\frac{\partial U_P}{\partial A_N} = 1 = c_1$$

$$\frac{\partial U_P}{\partial \delta Mess} = 1 = c_2$$

$$\frac{\partial U_P}{\partial \delta CalN} = 1 = c_3$$

$$\frac{\partial U_P}{\partial \Delta CalN} = 1 = c_4$$

$$\frac{\partial U_P}{\partial \delta Auf} = 1 = c_5$$

$$\frac{\partial U_P}{\partial \delta Verf} = 1 = c_6$$

Aus sechs Messungen von 10 V wurden die folgenden Werte ermittelt:

Nr.	**A_N**
1	10,000 022 V
2	10,000 027 V
3	10,000 022 V
4	10,000 025 V
5	10,000 028 V
6	10,000 026 V
Mittelwert:	**10,000 025 V**

Für die empirische Standardabweichung $s(\bar{x})$ des Mittelwerts, die aus n Messungen für einen arithmetischen Mittelwert $\bar{x}$=10,000 025 V ermittelt wurde und die Standardmessunsicherheit $u(\bar{x}) = \frac{2{,}53 * 10^{-7}}{\sqrt{6}}$ (relativ), gelten die allgemeinen Gleichungen.

$$u(\bar{x})\left[absolut\right] = u(\bar{x})\left[relativ\right] * \bar{x}$$

Für die Tabelle gilt:

$$u_i(y) = u(x_i) * c_i$$

Tabelle 1

Größe (X_i)	**Schätzwert (x_i)**	**Standardmess-unsicherheit $u(x_i)$**	**Ver-teilung**	**Sensitivi-täts-koeffizient c_i**	**Unsicher-heitsbeitrag $u_i(y)$**
A_N	10,000 025 V	$2{,}53*10^{-7}/\sqrt{6}*10$ V	Normal	$c_1=1$	$1{,}03*10^{-6}$ V
$\delta Mess$	0	$7{,}3*10^{-6}/\sqrt{3}*10$ V	Recht.	$c_2=1$	$4{,}21*10^{-5}$ V
$\delta CalN$	0	$4{,}1*10^{-6}/2*10$ V	Normal	$c_3=1$	$2{,}05*10^{-6}$ V
$\Delta CalN$	0	$1*10^{-7}/\sqrt{3}*10$ V	Recht.	$c_4=1$	$5{,}77*10^{-7}$ V
δAuf	0	$5*10^{-8}/\sqrt{3}*10$ V	Recht.	$c_5=1$	$2{,}89*10^{-7}$ V
$\delta Verf$	0	$0{,}5\ \mu V/\sqrt{3}$	Recht.	$c_6=1$	$2{,}89*10^{-7}$ V
U_P	**10,000 025 V**	**-**	**-**	**-**	**$4{,}217*10^{-5}$ V**

$$U = k * \sqrt{\sum u_i^2(y)}$$

Die einzelnen Messunsicherheitsterme X_i der Tabellen sind abgeschätzt, berechnet oder aus Spezifikationen ermittelt.

Erweiterte Meßunsicherheit mit k=2:

$U = 2*4{,}217*10^{-5}\ V=8{,}43*10^{-5}\ V=84\mu V$

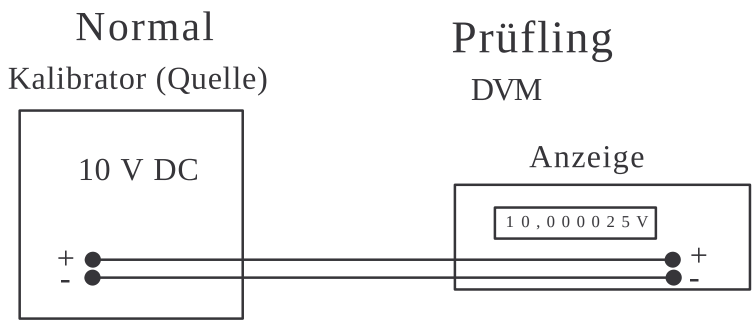
Vollständiges Meßergebnis:

$U_P = (\ 10{,}000\ 025 \pm 0{,}000\ 084)V$

Das bedeutet, dass der Kalibrator bei einer Einstellung von 10V am Ausgang eine Spannung von 10,000 025V abgibt.

b) Kalibrierung von Gleichspannungsmessern

Zur Kalibrierung der Meßeinrichtung, zum Beispiel DVM, wird mit einem Bezugsnormal (Kalibrator) eine Messung durchgeführt. Aus sechs Anzeigen ist der Mittelwert 10,000 025 V mit einer relativen Standardabweichung von $2{,}53 \cdot 10^{-7}$ in einer Beispielsmessung ermittelt worden. Weiterhin wird die Abweichung vom richtigen Wert (10V) des Kalibrators berücksichtigt. Seine Ausgangsspannung ist um 0,000 001V zu niedrig. So läßt sich mit der Modellgleichung die Unsicherheitstabelle erstellen.



Für die Modellfunktion gilt:

$$U_{Diff} = A_P - U_{CalN} - \Delta CalN + \delta Mess + \delta CalN + \delta Auf + \delta Verf$$

Die Funktionsgleichung auf das Beispiel angewendet, ergibt das folgende Messunsicherheitsbudget.

Tabelle 2

Größe (X_i)	**Schätzwert (x_i)**	**Standardmess-unsicherheit $u(x_i)$**	**Ver-teilung**	**Sensitivi-täts-koeffizient c_i**	**Unsicher-heitsbeitrag $u_i(y)$**
A_P	10,000 025 V	$2{,}53 \cdot 10^{-7}/\sqrt{6} \cdot 10$ V	Normal	$c_1=1$	$1{,}03 \cdot 10^{-6}$ V
U_{CalN}	10,000 000 V	$2{,}5 \cdot 10^{-6}/2 \cdot 10$ V	Normal	$c_2=-1$	$-1{,}25 \cdot 10^{-5}$ V
$\delta Mess$	0	$5{,}5 \cdot 10^{-7}/\sqrt{3} \cdot 10$ V	Recht.	$c_3=1$	$3{,}18 \cdot 10^{-6}$ V
$\delta CalN$	0	$1 \cdot 10^{-7}/\sqrt{3} \cdot 10$ V	Recht.	$c_4=1$	$5{,}77 \cdot 10^{-7}$ V
$\Delta CalN$	-0,000 001 V	$1 \cdot 10^{-7}/\sqrt{3} \cdot 10$ V	Recht.	$c_5=-1$	$-5{,}77 \cdot 10^{-7}$ V
δAuf	0	$5 \cdot 10^{-5}/\sqrt{3} \cdot 10$ V	Recht.	$c_6=1$	$2{,}89 \cdot 10^{-7}$ V
$\delta Verf$	0	$1 \cdot 10^{-6}/\sqrt{3} \cdot 10$ V	Recht.	$c_7=1$	$5{,}77 \cdot 10^{-6}$ V
$\mathbf{U_{Diff}}$	**0,000 026 V**	**-**	**-**	**-**	**$1{,}42 \cdot 10^{-5}$ V**

Erweiterte Meßunsicherheit mit k=2:

$U = 2*1{,}42*10^{-5}$ V= $2{,}84*10^{-5}$ V

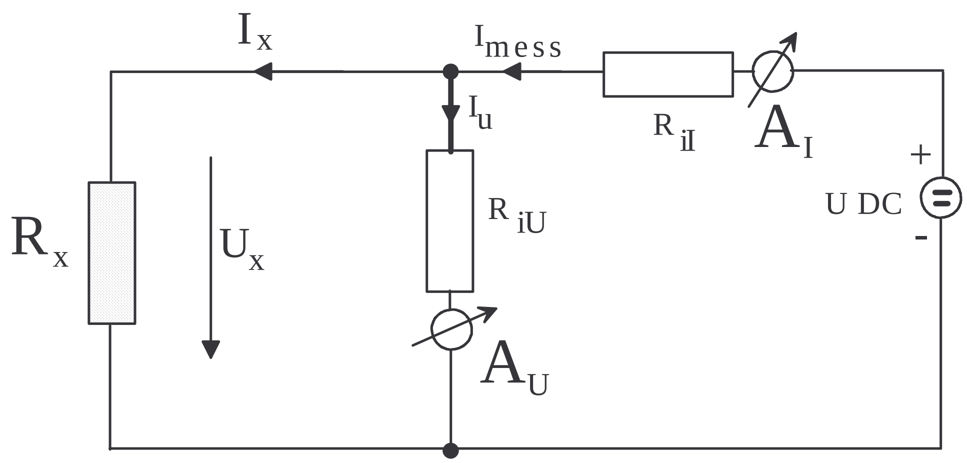
Vollständiges Meßergebnis: (Hier Angabe der Differenz !!!)

U_{Diff} = (0,000 026 ± 0,000 028)V

Das Ergebnis sagt aus, dass der Gleichspannungsmesser um 0,000 026 V bei einem Meßwert von 10 V zu hoch mißt.

Kalibrierung eines Widerstands mit Spannungs- und Strommessung

Es gilt : $R = \frac{U}{I}$



Zusammenbau der **Modellfunktion**:

$$R_X = \frac{U_X}{I_x} + \delta Verf + \delta Drift + \delta Cal + \Delta Cal + \delta Knoten$$

mit:

$$U_X = A_U + \delta Wert + \delta Ber + \delta Auf = A_U + \delta Mess$$

$$I_X = A_I + \delta Wert + \delta Ber + \delta Auf = A_I + \delta Mess$$

Es gelten die folgenden Abkürzungen:

$A_{U/I}$	Anzeigewert der Messung von Spannung und Strom
$\delta Wert$	Unsicherheit der Anzeige beim Messgerät
δBer	Unsicherheit des Bereichs beim Messgerät
δAuf	Auflösung des Messgeräts
$\delta Mess$	Unsicherheitsanteil des Messgeräts für 360Tage als "Summe" der drei Einzelterme (Wert/Ber/Auf)
$\delta Verf$	Einflüsse durch das Verfahren z.B. Anschlußtechnik
$\delta Drift$	Unsicherheit durch zeitliche Inkonstanz (Stabilität der DC-Quelle)
δCal	Unsicherheit durch Kalibrierung der benötigten Normale U/I) Rückführung der Messgröße Spannung/Strom
ΔCal	Korrektur der Anzeigen auf Grund der Rückführung
$\delta Knoten$	Stromfehler, da $I_{meß} \neq I_X$; abhängig vom Verhältnis R_X zu R_{iU}

Die Cal Terme sind normalerweise schon in der Bestimmung des Unsicherheitanteils Mess enthalten !!

Jetzt sind Ableitungen nötig:

$$\frac{\delta R_X}{\delta A_U} = \frac{\delta R_X}{\delta\delta Wert} = \ldots = \frac{1}{I_X} = c_1 = 43{,}47/\text{A}$$

$$\frac{\delta R_X}{\delta A_I} = \frac{\delta R_X}{\delta\delta Wert} = \ldots = \frac{-U_X}{I_X^2} = c_2 = -8{,}2/0{,}023^2 \,{*}\text{V/A}^2$$

$$\frac{\delta R_X}{\delta Verf} = \frac{\delta R_X}{\delta Drift} = \ldots = 1 = c_3$$

In den meisten Fällen bei denen keine Funktionen das Ergebnis bestimmt gilt für c = 1 !

So ist ein Aufstellung der Messunsicherheitstabelle und Berechnung möglich.

Es werden folgende fiktiven Werte angenommen.

Aus n=6 Messungen wurden die Mittelwerte und Standardabweichungen für die Anzeigen berechnet.
A_U=8,20V , $s_U(A_U)=1{,}2*10^{-4}$ (relativ) A_I=0,023A , $s_I(A_I)=2{,}4*10^{-4}$ (relativ)

Die Unsicherheiten für Wert/Ber/Auf-Bereich) sind absolut in der Tabelle für U und I angegeben.

Die Unsicherheit für das Verfahren wird mit $a=5*10^{-5}$ Ohm angenommen.

Für die Drift der Quelle zwischen dem Ablesen von U und I soll $a=3*10^{-5}$ gelten.

Die Kalibrierunsicherheit δCal aus der Rückführung von Spannung/Strom ist $5*10^{-5}$ (relativ) mit k=2 und für die Korrektur/Abweichung ΔCal gilt -0,004 Ohm.

Ein R_i = 1MOhm vom DVM und einem R_X = 356 Ohm bewirkt einen Stromfehler von etwa $3{,}5*10^{-4}$. Dies soll der Knotenfehler sein.

=> Tabelle 3

Größe (X_i)	**Schätzwert (x_i)**	**Standardmess-unsicherheit $u(x_i)$**	**Verteilung**	**Sensitivitäts-koeffizient c_i**	**Unsicherheits-beitrag $u_i(y)$**
A_U	8,20 V	$1{,}2*10^{-4}/\sqrt{6}*8{,}2$ V	Normal	c_1=1/0,023*A	$1{,}74*10^{-2}$ Ohm
$\delta Wert_U$	0	$3*10^{-5}/\sqrt{3}*8{,}2$ V	Rechteck	c_1=1/0,023*A	$6{,}17*10^{-3}$ Ohm
δBer_U	0	$2*10^{-5}/\sqrt{3}*8{,}2$ V	Rechteck	c_1=1/0,023*A	$4{,}12*10^{-3}$ Ohm
δAuf_U	0	$1*10^{-5}/\sqrt{3}*10$ V	Rechteck	c_1=1/0,023*A	$2{,}51*10^{-3}$ Ohm
A_N	0,023 A	$2{,}4*10^{-4}/\sqrt{6}*0{,}023$ A	Normal	c_2=-xi *V/A^2	$-3{,}49*10^{-2}$ Ohm
$\delta Wert_I$	0	$3*10^{-5}/\sqrt{3}*0{,}023$ A	Rechteck	c_2=-xi *V/A^2	$-6{,}18*10^{-3}$ Ohm
δBer_I	0	$2*10^{-5}/\sqrt{3}*0{,}023$ A	Rechteck	c_2=-xi *V/A^2	$-4{,}12*10^{-3}$ Ohm
δAuf_I	0	$1*10^{-5}/\sqrt{3}*0{,}1$ A	Rechteck	c_2=-xi *V/A^2	$-8{,}95*10^{-3}$ Ohm
$\delta Verf$	0	$5*10^{-5}/\sqrt{3}*356$ Ohm	Rechteck	c_3=1	$1{,}02*10^{-2}$ Ohm
$\delta Drift$	0	$3*10^{-5}/\sqrt{3}*356$ Ohm	Rechteck	c_3=1	$6{,}17*10^{-3}$ Ohm
δCal	0	$5*10^{-5}/2*356$ Ohm	Normal	c_3=1	$8{,}90*10^{-3}$ Ohm
ΔCal	-0,004 Ohm	$3*10^{-5}/\sqrt{3}*356$ Ohm	Rechteck	c_3=1	$6{,}17*10^{-3}$ Ohm
$\delta Knoten$	0	$3{,}5*10^{-4}/\sqrt{3}*0{,}023$ A	Rechteck	c_2=-xi *V/A^2	$-7{,}20*10^{-2}$ Ohm
R_x	**356,5177 Ohm**	**-**	Normal	**-**	**$1{,}22*10^{-1}$ Ohm**

Erweiterte Messunsicherheit mit k=2:

$U = 2*1{,}22*10^{-2}$ Ohm = 0,2449 Ohm

Vollständiges Messergebnis:

$R_X = (356{,}5177 \pm 0{,}2449)$ Ohm

Die Unsicherheitsbeträge $u_i(y)$ in der Tabelle sind unterschiedlich groß und so versucht man die größten Beträge wenn möglich durch Maßnahmen im Messverfahren zu verringern.

Es handelt sich hier um Rechenbeispiele und keine Muster für gleichartige Fälle.

Allgemeine Betrachtungen

Bei den Meßfehlerbetrachtungen ist die Verteilung der Meßwerte oder richtiger die Verteilungsdichtefunktion von großem Interesse. Es gibt die Rechteck-, Dreieck, U-, und Gauß-Verteilung. Die einfachste Form der Verteilungsdichtefunktion ist die Gleichverteilung oder Rechteckverteilung. Sie tritt dann auf, wenn über die Meßzeit betrachtet die Meßwerte mit Sicherheit in einem bestimmten Bereich liegen und jeder Einzelwert in diesem Bereich mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist. Diese Wertezustände können zum Beispiel die Auflösung einer Anzeige oder Temperaturgrenzen ($T = \pm 1K$) sein. Wenn zwei Signale mit Rechteckverteilung unabhängig voneinander (unkorreliert) zusammen wirken, kommt eine Dreieckverteilung zustande. Die Dreieckverteilung entsteht mathematisch durch das Faltungsprodukt der beiden Rechteckverteilungsdichtefunktionen. Die Faltung entspricht der Fläche, die entsteht, wenn man bildlich die eine Rechteckfunktion von der einen zur anderen Seite über die andere Rechteckfunktion schiebt. Die so abgedeckte Überdeckungsfläche (Integral) ergibt eine Dreieckfunktion mit normiert doppelter Breite. Eine weitere Rechteckfunktion mit der Dreieckfunktion gefaltet ergibt schon einen gaußähnlichen Funktionsverlauf. Je häufiger eine weitere Faltung mit einer Rechteckfunktion stattfindet, desto mehr nähert man sich der Gauß- oder Normalverteilung. Daher kann das Gesamtergebnis eines Meßunsicherheitsbudgets üblicherweise als normalverteilt angesehen werden, da es sich immer aus vielen Meßunsicherheitsanteilen zusammensetzt, wobei meistens die Unsicherheit des Normals schon gaußverteilt ist. Ob wirklich -wenn nicht bekannt- bei einer Meßreihe eine Gaußverteilung vorliegt, muß im Einzelfall mit einer großen Anzahl (ab 100) Einzelmesswerten überprüft werden. Unter der Gaußkurve liegen die erwarteten Ergebnisse. Der beste Schätzwert (Mittelwert) liegt im Maximum der Gaußkurve. Die Streuung aller Werte liegt unter der gesamten Gaußkurve. Aus praktischen Gründen wird ein Bereich von 2 (Sigma) ausgewählt. Dieser Bereich entspricht 95,4% der Gesamtfläche unter der Gaußkurve. Dabei wird akzeptiert, das etwa 5% der möglichen Werte außerhalb des erwarteten Wertebereiches liegen. Dies wird mit dem im DKD-3 festgelegten Faktor $k = 2$ ausgedrückt.
Die Verteilungsdichtefunktion einer idealer Meßreihe mit nur gleichen Ergebnissen ergäbe einen Diracstoß als Abbildungsergebnis. Der normierte Diracstoß (Fläche = 1) ist eine senkrecht stehende Gerade mit der Länge unendlich und der Breite Null.
Für die normierte Gaußverteilung (Fläche = 1) gilt: $\mu = 0$ (Mittelwert) und $= 1$ (Varianz). Sie sagt aus, dass kleine Abweichungen vom Mittelwert häufiger als große auftreten und dass negative und positive Abweichung gleich wahrscheinlich sind.