14. Dezibel

14.1 Definitionen

Um Leistungs- und Spannungsverhältnisse über mehrere Dekaden hinweg sinnvoll darstellen zu können, hat man das Dezibel als logarithmische Maßeinheit eingeführt. Es können somit beispielsweise sowohl Dämpfung als auch Verstärkung in Dezibel (dB) ausgedrückt werden. Zum Teil werden die Verhältnisse auch auf einen fest definierten Wert bezogen. So gilt für die Leistungsbemessung dBm ein Pegel von 1mW als Bezugswert.
Es wird mit dem Zehnerlogarithmus (zu Basis 10) gerechnet. (log)

$$\log a = b <=> a = 10^b \quad (14.1) \qquad d * \log a^n = d * n * \log a \quad (14.2)$$

Aus Gl. 14.1; n=10 oder 20 möglich:

$$y[dB] = n * \log x \;=>\; x = 10^{\left(\frac{y[dB]}{n}\right)} \quad (14.3)$$

Aus der Formel 14.3 ergibt sich die Grunddefinition für das Leistungsverhältnis, die immer gilt:

$$y = 10 * \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\ \text{dB} \quad (14.4)$$

Gleichung 14.4 ist hergeleitet aus den Beziehungen: 0Bel=10^0=1 und 1 Dezibel=1/10 * Bel (Def.). Weiter gilt: 1 Bel=10^1=10 / 2 Bel=10^2=100 / 0 dB = 1 / 10 dB=10 daher 1 Bel=10dB

Das Leistungsverhältnis aus Gleichung 14.4 kann bei gleichem Bezugswiderstand leicht in ein Spannungsverhältnis überführt werden.
Mit $P_X=U^2_X/R_X$ und mit Gleichung 14.2 läßt sich das Leistungsverhältnis neu angeben.

$$y = 20 * \log\left(\frac{U_1}{U_2}\right) - 10 * \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\ \text{dB} \quad (14.5)$$

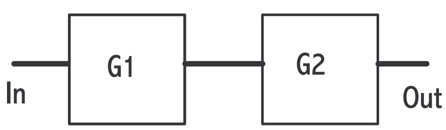
Mit $\underline{R_1=R_2}$ wird der zweite Term zu Null.

$$y = 20 * \log\left(\frac{U_1}{U_2}\right)\ \text{dB} \quad (14.6)$$

Nach Formel 14.4 und 14.6 ergibt sich die folgende Verhältnis-Darstellung, wobei für die obere Zeile $U_1>U_2$ und für die unter Zeile $P_1>P_2$ gilt. Die Zahlenreihe in der Mitte gibt den Y-Faktor in dB an. (Werte teils gerundet)

1		2				5			7	8	9	10
0 dB ...	***3 ....***	***6 .....***	***7 ...***	***9 .....***	***10 ....***	***13***	***14 ...***	***16 ..***	***17 ..***	***18***	***19***	***20***
1	2	4	5 ...	8	10	20		40 ..	50		80	100

Ein großer Vorteil der logarithmischen mathematischen Darstellung ist, daß eine Multiplikation (Division) von Leistungs- beziehungsweise Spannungsverhältnissen in eine Addition (Subtraktion) der Pegel y (dB) transformiert wird. Dies läßt sich für den Dämpfungsfall aber auch wie in diesem Beispiel leicht für eine Reihenschaltung zweier Verstärker verwenden.



Gain: G = (P_{out}/P_{in})
Mit: G1=10 <=> y_1 =10 dB ; G2=100 <=> y_2 =20 dB ergibt sich für die Gesamtleistungsverstärkung:
G_S=G1*G2 = 1000 <=> 30 dB = $y_1 + y_2 = y_S$
Dies kann mit der Gleichung 14.4 oder mit der nachfolgenden Tabelle leicht kontrolliert werden. Besonders bei großen Verhältniswerten und für die

schnelle Kopfrechnung ist die Dezibelrechnung besonders angenehm. Es muß allerdings streng zwischen den Leistungs- und Spannungsverhältnissen getrennt werden. Eine gemischte Rechnung ist nicht möglich aber auch normal nicht nötig. Nochmals sein darauf hingewiesen, daß der Bezugswiderstand bei Spannungsverhältnisberechnungen und deren Verknüpfung beziehungsweise Vergleich derselbe sein muß. Merkregeln für die Umrechnungen und Tabellen erleichtern einem die Dezibelhandhabung.

dB	Spannungs-verhältnis	Leistungs-verhältnis	dB	Spannungs-verhältnis	Leistungs-verhältnis	dB	Spannungs-verhältnis	Leistungs-verhältnis
0	1,0000	1,0000	x	x	x	x	x	x
1	1,2220	1,2589	21	11,22	125,9	41	112	12590
2	1,2589	1,5849	22	12,59	158,5	42	126	15850
3	1,4125	1,9953	23	14,13	199,5	43	141	19950
4	1,5849	2,5119	24	15,85	251,2	44	158	25120
5	1,7783	3,1623	25	17,78	316,2	45	178	31620
6	1,9953	3,9811	26	19,95	398,1	46	200	39810
7	2,2387	5,0119	27	22,39	501,2	47	224	50120
8	2,5119	6,3096	28	25,12	631,0	48	251	63100
9	2,8184	7,9433	29	28,18	794,3	49	282	79430
10	3,1623	10	30	31,62	1000	50	316	100 000
11	3,548	12,59	31	35,5	1259	51	355	$1,3*10^5$
12	3,981	15,85	32	39,8	1585	52	398	$1,6*10^5$
13	4,467	19,95	33	44,7	1995	53	447	$2,0*10^5$
14	5,012	25,12	34	50,1	2512	54	501	$2,5*10^5$
15	5,623	31,62	35	56,2	3162	55	562	$3,2*10^5$
16	6,310	39,81	36	63,1	3981	56	631	$4,0*10^5$
17	7,079	50,12	37	70,8	5012	57	708	$5,0*10^5$
18	7,943	63,10	38	79,4	6310	58	794	$6,3*10^5$
19	8,913	79,43	39	89,1	7943	59	891	$8,0*10^5$
20	10,000	100,00	40	100	10 000	60	1000	$1,0*10^6$
70	3162,3	$1*10^7$	90	31623	$1*10^9$	110	316228	$1*10^{11}$
80	10 000	$1*10^8$	100	100 000	$1*10^{10}$	120	$1*10^6$	$1*10^{12}$

Es gilt: Faktor	Leistung	Spannung
2x	3 dB	6 dB
3x	5 dB	10 dB
5x	7 dB	14 dB
10x	10 dB	20 dB

3 dB halbe Leistung Leistungs.dBs*2

Aus der Gleichung 14.4 werden die Formeln für die Dämpfung (a) und für die Verstärkung (G) abgeleitet. Dies äußert sich durch die Umkehrung der Leistungsverhältnisse.

$$a = 10 * \log\left(\frac{P_{in}}{P_{out}}\right) \text{ dB} \quad (14.7)$$

$$G = 10 * \log\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right) \text{ dB} \quad (14.8)$$

Wenn man Leistung (10) oder Spannung (20) von dB in % und umgekehrt berechnen will gelten die folgenen Gleichungen.

$$y = 10 * \log\left(\frac{x[\%]}{100}\right) \text{ dB} \qquad y = 20 * \log\left(\frac{x[\%]}{100}\right) \text{ dB} \quad (14.9)$$

$$x = 100 * 10^{\left(\frac{y[dB]}{10}\right)} \% \qquad x = 100 * 10^{\left(\frac{y[dB]}{20}\right)} \% \quad (14.10)$$

Beispiele: Verhältniss eines 6 dB Dämfungsglieds Ausgangs- in % zu Eingangsspannung: Mit Gl. 14.10 => $x=100*10^{-6/20}$=50,1% und umgekehrt mit 10% Spannungsverlust mit Gl. 14.9 => y=20*log(10/100)= -20dB. Für die Leistungsverhältnisse gilt dann bei 3 dB: $x=100*10^{-3/10}$=50,1% und bei 5% : y=10*log(5/100)= -13dB Kalibrierungsfaktoren bei Power Sensoren sind Leistungsfaktoren! Für Klirrfaktoren gelten folg ende Werte: 1%= -10dB ; 0,1%= -60dB ; 0,03%= -70dB ; 0,01%= -80dB und 0,003%=-90dB

14.2 Bezogener Pegel

Um im alltäglichen Meßfall nicht immer den Bezugswert für die Verhältnisse angeben zu müssen, hat man sich für viele Standardfälle auf feste Bezugswerte geeinigt. So wird bei dem bezogenen Pegel für P_2 oder auch U_2 ein Bezugswert oder auch Referenzwert festgesetzt. So werden aus den Verhältnispegeln absolute Leistungs- und Spannungspegel. Auch hier ist wieder der Systemwiderstand R_0 zu beachten. Besonders die Leistungspegel beziehen sich in der Hochfrequenztechnik üblicherweise auf 50 Ohm.

Pegelbezeichnung	Referenzwert ($P_{2;U2)}$
dBm	1 mW
dBW	1 W
dBV	1 V
dBµV	1 µV

Wenn P_1=P_2 beziehungsweise U_1=U_2 dann gilt: Pegel = 0 dBx
Das Hauptinteresse gilt bei Leistungen dem Bezugswert von 1mW und dem Pegel dBm.

Mit y = P (Pegel) und Gleichung 14.4 mit P_2=1mW folgt Gleichung 14.11.

$$P = 10 * \log\left(\frac{P_X}{1\,mW}\right) \text{ dBm} \quad (14.11)$$

Mit den Gleichungen 14.11 und 14.18 lassen sich die folgende Tabelle berechnen.

$P_{X[mW]}$	0.001	0.1	0.2	0.32	0.5	**1**	2	3.2	5	10	20	100	1000	10000
P[dBm]	-30	**-10**	-7	-5	-3	**0**	3	5	7	**10**	13	20	30	40
U[mV/50Ω]	7.07	70.7	99.9	126	158	**223.6**	316	397	500	707	998.8	2236	7071	22361

Wenn eine Spannung von 3,2V mit Dämpfungsgliedern ab geschwächt werden soll gilt:

Att.[dB]	0 dB-Ref.:	0	10	20	30	40	50	60	70
U[mV an 50Ω]		3200	1000	320	100	32	10	3,2	1

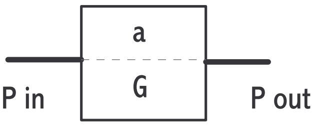
Mit Gleichung 14.11 und 14.3 läßt sich P_X berechnen.

$$P_X = 1\ mW * 10^{\left(\frac{P[dBm]}{10}\right)}\text{W} \qquad U_X = 223,6 * 10^{\left(\frac{P[dBm]}{20}\right)}\text{mV} \quad (14.12)$$

$$10 * \log(u/v) = 10 * \log u - 10 * \log v \quad (14.13)$$

Mit der allgemeinen Logarithmusformel 14.13 und den Gleichungen 14.7 und 14.8 lassen sich leicht Verstärkungs- und Dämpfungspegel bei einem 2-Tor bestimmen.
Für die Dämpfung (14.14) und Verstärkung (14.15) gilt:

$$a\ [dB] = P_{in}\ [dBm] - P_{out}\ [dBm] \quad (14.14)$$



$$G\ [dB] = P_{out}\ [dBm] - P_{in}\ [dBm] \quad (14.15)$$

Ein Dämpfungsglied mit P_{in}=2 mW = 3 dBm und P_{out}= 1 mW = 0 dBm
=> a [dB] = 3 - 0 = 3 dB <=> Nur noch halbe Ausgangsleistung .

Für weitere Umrechnungen im Leistungsbereich sind diverse Tabellen oft hilfreich. Für die spannungsbezogenen Verhältnisrechnungen werden nun einige Formeln und Tabellen hergeleitet. Dabei ist der Systemwiderstand R_0 zu beachten, dies gilt zum Beispiel bei der Umrechnung von Leistungswerten (dBm) in Spannungswerte. Für den absoluten Pegel mit dem Bezugswert von 1 Volt, unabhängig von R_0 (es muß nur R_0 gleich sein), gilt mit Gleichung 14.5:

$$P_U = 20 * \log\left(\frac{U_X}{U_0}\right)\ \text{dBV} \quad \text{mit } U_0 = 1\text{V} \quad (14.16)$$

Mit Gleichung 14.11 und $P=U^2/R$ folgt Gleichung 14.17 und aus Gleichung 14.17 mit 14.3 ergibt dies Formel 14.18.

$$P = 10 * \log\left(\frac{U_0^2}{R_0 * 0{,}001\ W}\right)\ \text{dBm} \quad (14.17)$$

$$U_0 = \sqrt{R_0[Ohm] * 0.001W * 10^{\frac{P[dBm]}{10}}}\ \text{V} \quad (14.18)$$

Bei dem Sonderfall P = 0 dBm folgt aus Gleichung 14.18.

$$U_0 = \sqrt{R_0[Ohm] * 0.001W}\ \text{V} \quad (14.19)$$

Gleichung 14.16 mit 14.3 nach U_X aufgelöst ergibt 14.20. Mit der Leistungsformel $P = \frac{U_2}{R}$ erhält man dann die Gleichung 14.21.

$$U_X = 1V * 10^{\left(\frac{P[dBV]}{20}\right)}\ \text{V} \quad (14.20)$$

$$P = \frac{1V^2 * 10^{\left(\frac{2*P[dBV]}{20}\right)}}{R}\ \text{W} \quad (14.21)$$

Die Tabelle links gilt mit Gleichung 14.20 (0 dBm) und auf der rechten Seite wird in Gleichung 14.21 mit P_U =0 dBV (1V) gerechnet.

0 dBm bei R_0		0 dBV bei R_0	
R_0 [Ohm]	U_0 [mV]	R_0 [Ohm]	P [mW]
1 M	31.6 V	1 M	0.001
600	774.6	600	1.67
150	387.3	150	6.67
75	273.8	75	13.3
60	244.9	60	16.7
50	223.606	50	20

U	1µV	10µV	100µV	**1mV**	10mV	100mV	**1V**
dBV	-120	-100	-80	-60	-40	-20	**0**
dBmV	-60	-40	-20	0	+20	+40	+60

Eine spezielle Umrechnungsformel zwischen dBV und dBm lautet:

$$dBV = dBm + 10 * \log R_0 - 30 \quad (14.22)$$

Beispiel: 0 dBV = 13 dBm + 17 - 30 bei 50 Ohm mit 10*log50=17. Es gilt: 13 dBm <=> 1V <=> 0 dBV aus Tabelle Seite 14-3.

Weiterhin gelten folgende Beziehungen und Gleichungen:

$$P = 20\log\left(\frac{U}{1V}\right) + 13dB \quad \text{dBm} \quad (14.23)$$

0 dBm = 107 dBµV bei 50 Ohm bzw: 1µV= - 107 dBm

Bandbreitenumrechung beim Rauschen:

$$B = 10 * \log\left(\frac{B}{1\,Hz}\right) \ \text{dB} \quad (14.24)$$

Beispiel: B=25 kHz => B=10*log(25000/1)=43,98 dB ; auch gil t P= -174dBm+B in dBm

14.3 Pegeländerungen

Bei relativen Pegeländerungen macht sich die Unsymmetrie, die durch den Logarithmus entsteht, bemerkbar. Allgemein kann bei der Spannungsänderung die Gleichung 14.25 verwendet werden. Für die Leistungsänderung gilt ähnliches, aus 20* wird 10* in Gl.14.25. Siehe auch Gleichungen 14.9 und 14.10.

$$dy = 20 * \log(1 \pm dx) \ \text{dB} \quad (14.25) \qquad dx = \frac{x\,[\%]}{100\%} = \frac{Abweichung}{Absolutwert}$$

Wenn die relative Abweichung 1% ist, so muß für dx = 0.01 eingesetzt werden. Dies ergibt immer zwei Ergebnisse, die aber im allgemeinen durch Mittelwertbildung als eine Abweichung in dB angesehen werden können.

Beispiel : U=1 V ±30mV => ± 3% in Gleichung 14.25 => +0.25674 und -0.26456 => Mittelwert: 0.26065. Die folgende Tabelle (linke Hälfte) ist mit Gleichung 14.25 gerundet ermittelt. Je größer der Fehler in %, desto größer der ± Fehler. Für Leistung bei +0.4%: dy=10*log(1.004mW/1.000mW)=+0.017dB

dU [±%]	dy [ca. ±dB]	dP [±%]	Merkregel für kleine Pegel !
1	0.086	2	bei Spannung:
1.15	0.1	2.3	1 % = 0.1 dB
2	0.174	4	zB: EPM-1
2.3	0.2	4.6	
3	0.260	6	bei Leistung:
4	0.35	8	1 % = 0.05 dB oder 23 % = 1 dB
5.7	0.5	11.5	
ca. 12	1	-20.5 und + 25.9 !!	bei Powermeter [+1dBm= +1.26mW]

Gleichung 14.25 kann auch nach dem Abweichungswert aufgelöst werden. Es wird dazu für dx = dA/We eingesetzt. Mit der Umrechnung ergibt sich Gleichung 14.26 linear.

$$dA = \pm We * (10^{\frac{\pm|dy[dB]|}{20}} - 1) \qquad (14.26)$$

Es ergeben sich zwei Lösungen mit Upper (+) und Lower (-) Werten.

Beispiel: (hier mit unterschiedlichen dy-Werten von oben) 1*(10$^{(0.2564 / 20)}$.-1)=30 und 1*(1- 10$^{(-0.26456 / 20)}$)=30 mit einem dy-Wert (±0.1 dB) bei 1V (We) ergibt sich: 11.58mV(Upper); 11.45mV(Lower)

Herleitung der Pegeländerung allgemein über das totale Differenzial mit ln10=2,3:

$$Y = 10 * \log\left(\frac{P}{1mW}\right) \quad \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial P} = 10 * \frac{1}{\left(\frac{P}{1mW}\right) * \ln 10} * \frac{1}{1mW} * \Delta P \; [dB] \qquad (14.27)$$

Beispiel: P=1mW; dP=0,04mW=4% => dy/dP=10*1/(1*2,3)*1/1mW*0,04mW=10*0,43478*0,04=0,1739dB