

## 2. Widerstand

Ein Normalwiderstand ist ein Gleichstromwiderstand von hoher Genauigkeit, der auf Grund seiner Bauform eine große Langzeitstabilität besitzt und dessen Temperatur und Alterungsverhalten gering und bekannt sein sollte. Er stellt somit das Ohm für Gleichspannung auf Jahre hinaus stabil dar. Dekadische Werte von 0.1 mOhm bis 10 MOhm beziehungsweise von  $1 \cdot 10^6$  Ohm bis  $1 \cdot 10^{13}$  Ohm sind in Gebrauch. Die niederohmigen Widerstände bis 10 MOhm sind oft drahtgewickelt. Darüber hinaus gibt es Schichtwiderstände im Glasgehäuse.

### 2.1 Grundformeln

Zur Erinnerung werden die allgemeinen Formeln, die sich in jedem Lehrbuch finden nochmals dargestellt.

$$R = \frac{U}{I} \quad \left[ \frac{V}{A} = \Omega \right] \quad (2.1)$$

$$\underline{Z} = R = X_R \quad (2.2)$$

Der Phasenwinkel von Strom und Spannung ist gleich.  $X_R$  ist konstant unabhängig von der Frequenz. Die Reihenschaltung entspricht einer Addition der Einzelwiderstände. Für die Energie beziehungsweise Leistung P gilt.

$$P = U * I = I^2 * R = \frac{U^2}{R} \quad (2.3)$$

Für den Widerstandswert eines Drahtes, abhängig von der Länge (l), dem Querschnitt (A) und spezifischem Widerstand ( $\rho$ ), gilt die Gleichung 2.4. Diese ist bei der Konstruktion von Drahtwiderständen von großer Bedeutung.

$$R = \frac{\rho * l}{A} \quad (2.4)$$

Die allgemeine Temperaturgleichungen für Widerstände, die nun folgt wird später noch genauer betrachtet.

$$R_T = R_{20} * (1 + a_{20} * (T - T_{20})) = R_0 + \Delta R \quad (2.5)$$

$$\Delta R = TK_R * R_0 * \Delta T \quad (2.6)$$

$$TK_R = \frac{1}{R_0} * \frac{\Delta R}{\Delta T} \quad (2.7)$$

Für die Rauschspannung wird hier die Normal- und die Größengleichung angegeben.

$$\overline{U_R} = \sqrt{4 * k * T * \Delta f * R} \quad (2.8)$$

$$\frac{\overline{U_R}}{\mu V} = 0,128 * \sqrt{\frac{R}{k\Omega} * \frac{\Delta f}{kHz}} \quad (2.9)$$

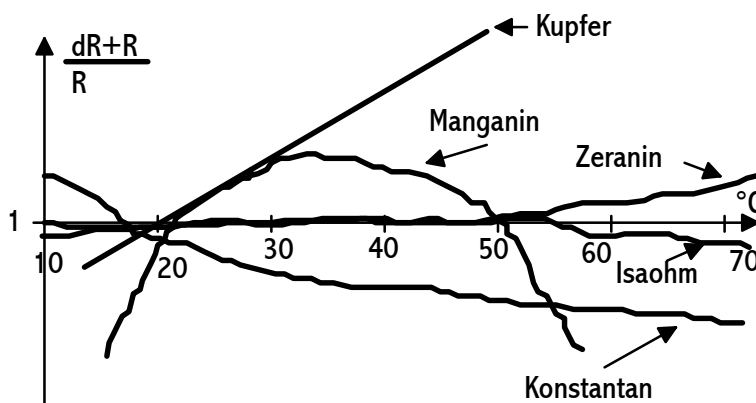
### 2.2 Material

Um die strengen Bedingungen für einen Normalwiderstand zu erfüllen, werden an den Wickeldraht folgende Bedingungen gestellt; hoher spezifischer Widerstand, kleiner Temperaturkoeffizient (TK), fast keine Alterungserscheinungen und geringe Thermospannungen gegen Kupfer, das häufig für die Anschlußleitungen verwendet wird. Der bekannteste Widerstandsdraht ist Manganin (1889), aber auch andere Materialien, sind durchaus gebräuchlich. Die

Tabelle faßt die Kenngrößen aller möglichen Widerstandsmaterialien zusammen, von denen aber nur die ersten vier für Präzisionswiderstände in Betracht kommen. Die Angaben sind nicht immer gleich  $\pm 1\%$ , da es sich zum Teil um Firmengeheimnisse handelt.

Stoff	Zusammensetzung(%)	$\rho \left[ \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}} \right]$	$\text{TV}_{\text{Cu}} \left[ \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \right]$	$\text{TK} (a_{20}) \left[ \frac{1}{\text{K}} \right]$	Bem.
Manganin	86Cu12Mn2Ni [Isa]	0.43	-0.6	$\pm 1 \cdot 10^{-5}$	bekannt
Evanohm	76Ni20Cr4(Al+Fe)	1.33	+0.5	$\pm 1 \cdot 10^{-5}$	
Isaohm	71Ni21Cr3Cu [Isa]	1.32	+0.5	$\pm 1 \cdot 10^{-5}$	
Zeranin	88Cu6Ge6Mn [Isa]	0.43	-1.3	$\pm 3 \cdot 10^{-6}$	gut;TK kl.
Nickelin	54Cu26Ni20Zn	0.43	-0.5	$+1.1 \cdot 10^{-4}$	
Konstantan	54Cu45Ni1Mn	0.50	-40	$\pm 4 \cdot 10^{-5}$	TU gr.
Kupfer	~100Cu (rein) [Isa]	0.017	~0	$+4 \cdot 10^{-3}$	Kabel
Fe-Cr	76Fe20Cr4Al	1.2	-	$+4 \cdot 10^{-5}$	
Centanin	67Cu27Mn5Ni	1.0	+3	$\pm 2 \cdot 10^{-5}$	
Kohleschicht		65	-	$-5 \cdot 10^{-4}$	einfach
Metallfilm		-	-	$+1 \cdot 10^{-5}$	1%er
Quecksilber	~100Hg	0.958	-	$+8 \cdot 10^{-4}$	giftig
Seewasser		$3 \cdot 10^5$	-	-	salzig

Temperaturkurven der Stoffe (ohne dR-Maßstab)



Die Kurven geben nur in etwa den Verlauf im normalen Temperaturbereich wieder.

Das Manganin, was in der Isabellenhütte (Dillenburg) produziert wird, hat einen parabelförmigen TK-Verlauf, der durch die Gleichung 2.10 beschrieben wird. Die Formel, die auf eine Temperatur von  $20^\circ\text{C}$  bezogen ist, gilt für T nur im Bereich von  $+40^\circ\text{C}$  und  $+15^\circ\text{C}$ . Durch entsprechen-

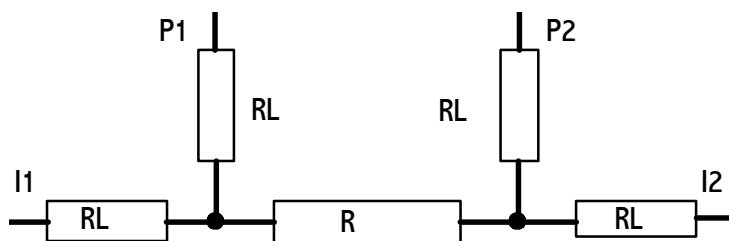
des Legieren, mechanisches und thermisches Behandeln des Drahtes, kann die Parabel in ihrer Form etwas kleiner oder größer ausfallen, was sich durch unterschiedliche Temperaturkoeffizienten a und b ausdrückt. So liegt a zwischen  $2 \cdot 10^{-6}/\text{K}$  und  $1 \cdot 10^{-5}/\text{K}$  und b beträgt  $-5 \cdot 10^{-7}/\text{K}^2$ . H&B:  $a=2.5 \cdot 10^{-6}/\text{K}$ ; Maximum-Umkehrpunkt bei  $22.5^\circ\text{C}$  mit  $dR=3 \cdot 10^{-6}$ . Es gibt auch einen Minimum-Umkehrpunkt bei etwa  $350^\circ\text{C}$ .

$$R_T = R_{20} * (1 + a_{20} * (T - 20^\circ\text{C}) + b * (T - 20^\circ\text{C})^2) \quad (2.10)$$

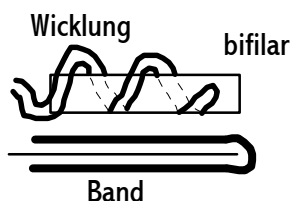
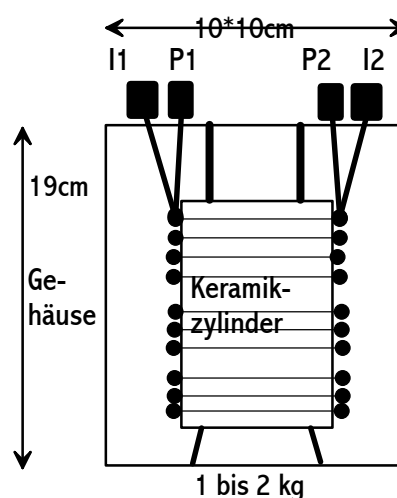
Die Alterung ist weder in ihrer Richtung noch in der Größe mit kleiner als  $1 \cdot 10^{-5}$  pro Jahr im voraus bestimmbar. Isaohm hat, wie auch Kupfer einen linearen Temperaturverlauf. Die leicht S-förmige Kurve von Zeranin ist um  $20^\circ\text{C}$  auch linear.

### 2.3 Aufbau

Die Anschlußtechnik ist, insbesondere bei niederohmigen ( $\leq 1000 \text{ Ohm}$ ) Widerständen üblicherweise vierpolig, da der Nullwiderstand der Anschlüsse und Zuleitungen im Meßaufbau im Milliohmereich liegen kann. Durch die Stromklemmen  $I_1$  und  $I_2$  wird niederohmig ein Konstantstrom geschickt und an den Spannungsklemmen  $P_1$  und



$P_2$  wird hochohmig das Potential, das heißt der Spannungsabfall am Widerstand (R) selbst, gemessen. So üben die Leitungswiderstände  $R_L$  keinen Einfluß auf das Meßergebnis aus. Die großen Normalwiderstände bestehen aus Manganindraht mit Seide umspinnen oder lackiert. Vor dem Einbau wird eine künstliche Alterung des nackten Drahtes bei  $140^\circ\text{C}$  über 24 Stunden durchgeführt. Die niederohmigen Widerstände sind aus Manganinblechen aufgebaut. Der Draht wird locker auf einen Porzellan-(Keramik-)Spulenkörper gewickelt. Die elektrische Verbindung geschieht durch eine Hart-Lötung bei  $700^\circ\text{C}$  mit Silberlot an den Kupferanschlußklemmen, was eine große Erfahrung voraussetzt. Der Widerstand kann offen gebaut sein, sodaß die Wicklungen direkt mit der Umgebung in Verbindung stehen, oder der Wickelzylinder befindet sich in einem mit Spezialöl gefüllten Behältnis. Eine dauernde Umspülung der Wicklungen kann auf lange Sicht die Isolierung beschädigen und Korrosion durch freigesetzte Säure verursachen. Um das stark induktive Verhalten eines niederohmigen Wickelwiderstandes ( $<100 \text{ Ohm}$ ) zu verringern, wird dieser bifilar gewickelt.



Dabei heben sich die magnetischen Felder auf. Es wird die Induktivität kleiner aber die Kapazität ist groß. Um auch diese zu verringern, besonders bei Widerständen größer als  $100 \text{ Ohm}$ , wendet man die Caperonwicklung an. Die Gesamtwicklung wird in Gruppen (Kammern) aufgeteilt und jede Gruppe hat zwei gegenläufige Lagen. Hierdurch wird die Induktivität stark und die Kapazität schwächer herabgesetzt. Um induktiven und kapazitiven Anteil in hochohmigeren Widerständen stark zu

verringern, wendet man die Wagnerwicklung, eine Mehrfachreihenschaltung der Caperonwicklung an. Durch diese Maßnahmen wird auch die Zeitkonstante der Widerstände stark verkleinert. So sind die Gleichstromnormalwiderstände auch für niederfrequente Wechselströme, bei abhängig mit Frequenz ansteigender Ungenauigkeit, zu benutzen. Für die offenen Widerstände empfiehlt sich im Temperaturbad das Shellöl S4919 oder .....

Es gibt außer dem typischen offenen Präzisionswiderstand von AEG/H&B im Bereich  $0.1\text{mOhm}$  bis  $100\text{kOhm}$ , wie oben beschrieben, noch speziellere Bauformen, die sich im Laufe der Zeit als besonders gut herausgestellt haben. So ist der

Thomas-Ein-Ohm-Widerstand (1931/NBS) wie der Name schon sagt nur für den Nennwert von 1 Ohm gebaut worden. Auch er benutzt als Widerstandsdraht das Manganin, ist aber doppelwandig, sodaß die Wicklungen nicht mit dem Öl in Berührung kommen, wenn dieser in einem Temperaturbad betrieben wird. Zum Schutz vor Umwelteinflüssen ist der Zwischenraum, in dem sich die Wicklungen befinden mit Stickstoff gefüllt. Auch wenn der Thermocontact zwischen dem Öl und den Wicklungen nicht so gut wie bei dem offenen Typ ist, so ist er bis heute als Primärstandart in vielen Instituten wegen der äußerst geringe Driftrate von kleiner als 0.1ppm pro Jahr sehr beliebt. Von 1mOhm bis 0.1 Ohm kommt eine offene Bauweise zur Anwendung die zum Teil als Reichsanstalt Typ bezeichnet wird, da er von dem Vorläufer der PTB (Otto Wolf) konstruiert wurde. In USA kommt für Widerstände größer als 1 Ohm der Rosa- oder NBS-Typ, der sich in einer geschlossenen mit Öl gefüllten Kapseln befindet, zum Einsatz. Von ESI wird der Typ SR104 mit einem Nennwert von 10 kOhm gebaut. Für viele Messungen und Kalibrierungen ist dieser Nennwert von großer Wichtigkeit. Es handelt sich um eine Gruppe von Evanohm-Widerständen, die auf niedrigen Temperaturkoeffizienten selektiert und vorgealtert sind. Sie befindet sich in einem mit Silikonöl gefüllten geschlossenen und thermisch isoliertem Gehäuse. Die Stabilität beträgt 1ppm pro Jahr und der Temperaturkoeffizient  $\pm 0.2\text{ppm pro } ^\circ\text{C}$ . Die Innentemperatur kann mit einem eingebauten Temperatursensor überwacht werden. Eine neue Widerstandsreihe wird von der Firma Fluke, Typ 742 zwischen 1 Ohm und 10MOhm, gefertigt. Jeder Nennwert besteht aus einer Gruppe ausgemessener Einzelwiderstände, aus Wickeldraht (NiCrCoAl), in Parallelschaltung, die sich in einem geschlossenen Gehäuse befinden und kein Ölbad zum Betrieb benötigen. Durch die Gruppenbildung kann sowohl der Nennwert sehr genau erreicht, als auch der Temperaturkoeffizient niedrig gehalten werden. Der Hauptnachteil bei den neueren kleinen Normalwiderständen ist im Gegensatz zu den älteren großen Bauformen deren geringe zulässige Belastung. Es besteht die Möglichkeit bei 1M und 10 MOhm Widerständen eine Reihenschaltung von 10 kleineren Nennwerten, da diese leichter herzustellen und zu selektieren sind, vorzunehmen. Bei Normalen ab  $10^8$  Ohm werden bis  $10^{11}$  Ohm Metalloxid- und bis  $10^{14}$  Ohm in Schutzgas eingeschmolzene Kohleschichtwiderstände verwendet. Hier liegen die jährlichen Widerstandsänderungen zwischen 0.1% und 1%. Der Temperaturkoeffizient ist mit etwa  $3 \cdot 10^{-4}$  pro Kelvin auch nicht besonders gut. Auf die starke Spannungsabhängigkeit wird im nächsten Kapitel eingegangen. Widerstandsdekaden sind aus mehreren Einzelwiderständen aufgebaut, die meistens über Drehschaltern in Reihe verbunden werden können. Allein schon wegen der Schaltmechanik und keiner Möglichkeit sie in Öl zu betreiben, werden sie nicht als Präzisionsnormale eingesetzt. Die Genauigkeit reicht von 1% bis 0.01% und nur zum Teil mit Reedrelais in Kalibratoren bis zu ca. 20ppm.

## 2.4 Effekte

Die Frequenzabhängigkeit tritt nicht nur bei niederfrequentem Wechselstrom, sondern auch beim Umschalten von Gleichstrom (Zeitkonstante), oft angewendet bei Widerstandsmeßgeräten um Thermospannungen zu kompensieren, auf. Die Zeitkonstante ist die Relaxationszeit für Ladungsabbauvorgänge nach einer e-Funktion. Sie wird bestimmt durch die Kapazität und den Widerstand der daran beteiligt ist.

$$\tau = \frac{\epsilon * \epsilon_0}{\sigma} \quad (2.11)$$

$$R = \frac{d}{\sigma * A} \quad C = \epsilon * \epsilon_0 * \frac{d}{A} \quad (2.12)$$

Aus der Gleichung 2.11 und den Gleichungen 2.12 ergibt sich 2.13.

$$\tau = R * C \quad (2.13)$$

Für Kupfer beträgt die Zeitkonstante nur  $1.5 \cdot 10^{-15}$ s und für Glas zwischen 5 und 5000s. Bedingt durch den Widerstandsaufbau liegen die Zeitkonstanten der AEG-Normalwiderstände je nach Wert bei  $0,1 \mu\text{s}$  (1kOhm) bis  $10 \mu\text{s}$  (0.01Ohm). Der Widerstandswert kann bei diesen Bauformen bei 500 Hz Wechselstrom schon um  $1 \cdot 10^{-5}$  vom Gleichstromwert abweichen. Die Luftfeuchtigkeit ruft eine mechanische Änderung des Isoliermaterials Seide hervor und damit eine Drahtverformung, die wiederum eine Widerstandsänderung zur Folge hat. Diesen Feuchtigkeitseffekt kann man ausschließen, indem man den Widerstand luftdicht abkapselt oder in Öl taucht. Bei hochohmigen Widerständen (Kohleschicht) größer als 1 GOhm wird mit steigender Meßspannung, zum Teil schon ab 20 Volt, der Widerstand geringer. Dieser Effekt ist zwar in den meisten Fällen bis zu einer Maximalspannung reversibel, jedoch kann sich der alte Wert erst nach Tagen einstellen. Bei 100V beträgt für die folgenden Nennwerte (Ohm) der Spannungsabfall typisch:  $1 \cdot 10^9/-0.5\%$ ;  $1 \cdot 10^{10}/-1.2\%$ ;  $1 \cdot 10^{11}/-2.5\%$ . Das Temperaturverhalten äußert sich nicht nur im Temperaturkoeffizient des Wickeldrahtes, sondern in noch drei weiteren Effekten. Durch die Maximalleistung des Widerstands ergibt sich die Meßspannung.

$$U = \sqrt{P * R} \quad (2.14)$$

Der Seebeckeffekt tritt auf in einem Leiterkreis mit verschiedenen Metallen, deren Kontaktstellen unterschiedliche Temperaturen aufweisen. Wie bei einer Diode treten abhängig von der Kontakttemperatur Elektronen (Austrittsarbeit) in das andere Metall über. So ist bei unterschiedlichen Kontakttemperaturen im Stromkreis eine Thermospannung meßbar. Dieser Effekt wird bei Thermoelementen zur Temperaturmessung verwendet. Die Umkehrung des Seebeckeffekts ist der Peltiereffekt. Hier entsteht keine Spannung durch Temperaturdifferenz, sondern es wird durch eine Spannungsquelle eine Temperaturdifferenz zwischen den Kontaktstellen hervorgerufen. Bei gleicher Stromrichtung und bei den Effekten, wird jetzt die Stelle kühler, die beim Seebeckeffekt die wärmere war. (Umkehrung). Der Peltiereffekt wirkt also hemmend auf den Seebeckeffekt. Der Thomsonseffekt sagt aus, daß in einem Leiter mit Temperaturgefälle ein Spannungsabfall durch einen Thermostrom entsteht. Um all diese Einflüsse die sich in Thermospannungen äußern sehr klein zu halten, wird bei der Messung die Polarität des Meßstromes alle paar Sekunden umgepolt um diese so herauszumitteln (Solatron 7081), oder in einer kurzen stromlosen Phase wird die Thermospannung gemessen und von der Meßspannung abgezogen (HP3456/3458A). Zusätzlich sollte man wenn möglich reine Kupferverbindungen (Buchsen-Stecker-Kabel) untereinander herstellen. So erzeugt eine Thermospannung von  $5 \mu\text{V}$  bei einem Widerstand von 1mOhm und einem Meßstrom von 50A einen Fehler von 0.01%. Gerade bei diese hohen Meßströmen ist auf entsprechend dicke Kabel und eine Ölumspülung des Anschlusses zu achten. Außerdem muß dafür gesorgt werden, das im Meßkreis ein Temperaturgleichgewicht besteht, das heißt der Prüfling darf nicht stark belastet werden und sollte gekühlt sein ( $23^\circ\text{C}$ ) und die Anschlußklemmen und Stecker dürfen mit der Hand beim Anschluß nicht unnötig erwärmt werden. Es hat sich als günstig erwiesen vor der eigentlichen Messung eine Wartepause von ein paar Minuten einzulegen. Resteffekte sind elektrochemische Vorgänge, die Spannungen erzeugen können. Auch Leckströme parallel zu den hochohmigen Widerständen und deren Zuleitungen verkleinern dessen Wert. Gerade bei hochohmigen Widerständen ab 1MOhm empfiehlt sich eine Abschirmung der Zuleitungen und des Widerstandes, am besten mit Guardschirm (dreipolig) oder ersatzweise über die Masse. Ohne Abschirmung sollten sich die Anschlußkabel nicht berühren und eine Bewegung um den Meßplatz vermieden werden. Auch die Bewegung des Ölbad durch Ladungen, wirkt sich auf die Messung kapazitiv aus, was in einer höheren

Standardabweichung (unstabiler) zu beobachten ist. Daher empfiehlt es sich bei Widerständen größer 10 kOhm für die Messung selbst das Bad kurz auszuschalten. Widerstände mit mehr als 1MOhm sind, wegen des Parallelwiderstandes durch das Öl und dem gerade beschriebenen Effekt, nur an Luft zu messen.

Bezeichnung	Klasse[%]	Anschluß	Aufbau	Leistung	TK[1/K]	Material
H&B / AEG	0.002	4polig	offen; gr.	1W	<2ppm	Manganin
Thom.Le&No-4210	0.002	4polig	zu; gr.	0.1W	<2ppm	Manganin
Guildline 9330	0.001	4polig	zu; kl.	0.1W	<2ppm	?
Genrad 1440	0.01	4polig	zu; kl.	1W	~20ppm	Evanohm
ESI SR1	0.006	4polig	zu; kl.	1W	~5ppm	?
Fluke 742A	0.001	4polig	zu; mitt.	0.2W	<1ppm	
Keithley	0.1	3polig	zu; kl.	0.1W	gr.	Kohle?

## 2.5 Hallwiderstand

Die Einheit des Widerstandes wurde bisher in aufwendiger Weise von einem berechenbaren Kondensator abgeleitet. Mit der Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts durch Klaus von Klitzing, für die er 1985 den Nobelpreis (Physik) erhielt, kann heute das absolute Ohm mit einer Unsicherheit von 0.2ppm anders dargestellt werden. Für den quantisierten Hallwiderstand gilt allgemein die Gleichung 2.15 mit der Plank-Konstante  $h$ , der Elementarladung  $e$  und der Stufenzahl  $i$ .

$$R_{Hi} = \frac{1}{i} * \frac{h}{e^2} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.15)$$

Für  $R_{Hi}$  mit  $i=1$  hat man sich 1990 international auf den Wert von  $R_K = 25812.807$  Ohm (Klitzingkonstante) geeinigt.

Der Halleffekt ist schon seit 1879 bekannt und sagt aus, daß bei einem dünnen Metallband, das von einem Gleichstrom  $I$  durchflossen wird und sich senkrecht in einem Magnetfeld befindet, an den Querseiten eine Spannung ( $U_H=R_H*I$ ) auftritt. Dies kommt daher, weil auf in einem Magnetfeld bewegende Elektronen die Lorentz-Kraft ausgeübt wird, die in Querrichtung zur Stromflußrichtung wirkt. Hier ist der klassische Hallwiderstand von der Elementarladung, der Elektronendichte  $n$  und dem Magnetfeld  $B$  abhängig und tritt nicht in festen Stufen auf.

$$R_H = \frac{1}{n * e} * B \quad (2.16)$$

Bei der Untersuchung dieser Hallspannung von Silizium-MOSFETs bei der Temperatur von 1K und einem starken Magnetfeld mit 20 Tesla wurde bei dem hyperbolischen Verlauf der Hallspannung eine stufenförmige Überlagerung festgestellt. Dieser quantisierte Verlauf läßt sich durch das Verhalten der Elektronen in ihren erzwungenen Kreisbahnen erklären. Aus den durchgeführten Messungen und Berechnungen läßt sich dann die Gleichung 2.15 ableiten.

In der Praxis nimmt man eine Reihenschaltung von einem Normalwiderstand und einem Hallwiderstand, die von dem Strom  $I$  ( $\sim 30\mu A$ ) durchflossen wird. Beide Spannungsabfälle werden bestimmt und über das Verhältnis beider, der Normalwiderstand berechnet. Bei dieser klassischen Substitutionsmessung wird aus praktischen Gründen, Ausbildung der Stufe und Widerstandswert, die Stufenzahl  $i$  2 oder 4 gewählt. Dann ist ein Widerstandswert von etwa 12.9 kOhm oder 6.5 kOhm zu erwarten. Die Unsicherheit der Messung selbst, ohne Normale, liegt bei  $1 * 10^{-8}$ . Ein Nachteil bei dem Hallwiderstand ist, daß dieser keinen dekadischen Wert

besitzt und daher keine eins zu eins Messung zu den üblichen Normalen möglich ist. Dies erhöht im allgemeinen die Substitutionsunsicherheit und erschwert eine Anbindung an die bestehenden Normale.

### 2.6 Widerstandsschaltungen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten Widerstände zu verschalten, um bestimmte Meßprobleme optimal zu lösen. Die einfachste und bekannteste Schaltung, außer der einfachen Reihen- und Parallelschaltung, ist die des Spannungsteilers.

$$R_E = \frac{U_E}{I_E} = R_1 + \frac{R_2 * R_L}{R_2 + R_L} \quad (2.17)$$

Über das Spannungs zu Widerstandsverhältnis gilt.

$$U_L = \frac{R_2 * R_L}{R_2 * R_L + R_1 * R_2 + R_1 * R_L} * U_E \quad (2.18)$$

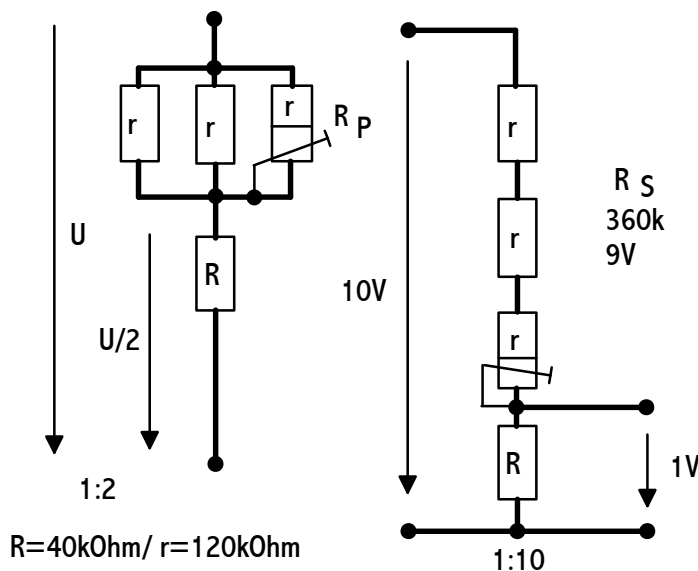
Die Gleichung 2.18, die ja mit der Last gilt, kann mit der Bedingungen  $R_L \gg R_2$ , das heißt der Lastwiderstand ist sehr hochohmig gegenüber  $R_2$  vernachlässigt werden ( $R_1 * R_2 \ll$  klein).

$$U_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 * R_2}{R_L}} \quad (2.19)$$

$$U_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} * U_E \quad (2.20)$$

**Beispiel:**  $U_E = 100V$ ;  $R_1 = 1000\Omega$ ;  $R_2 = 100\Omega$ ;  $R_L = 10k\Omega, 1M\Omega, \infty\Omega$ . Das ergibt mit Gl.2.18 bzw. 2.20:  $U_L = 9.009009V, 9.09008V, 9.090909V$ .

Nach diesem Prinzip kann man auch die Abgriffsspannung einer Teilerkette berechnen. Zu beachten ist, daß die Quelle ( $U_E$ ) die Last  $R_E$  sieht und soll daher üblicherweise im Sense-Mode betrieben werden. Eine weiter Schaltung verfolgt das Hammon-Prinzip (1954). Um bestimmte genaue Widerstandsteiler zu bauen, braucht man nur zehn abgleichbare Widerstände, die man auf einer Brücke sehr genau mißt. So kann man durch Reihen- und Parallelschaltung Werte von 1:10/:100 erreichen.



Ein weiterer Schaltung verfolgt das Hammon-Prinzip (1954). Um bestimmte genaue Widerstandsteiler zu bauen, braucht man nur zehn abgleichbare Widerstände, die man auf einer Brücke sehr genau mißt. So kann man durch Reihen- und Parallelschaltung Werte von 1:10/:100 erreichen.

**Beispiel:**  $R=10 \Rightarrow 10 * 10$  in Reihe = 100 oder  $10 * 10$  Parallel = 1

Der Abgleichfehler der Einzelwiderstände geht im Widerstandsverhältnis nur als Fehler zweiter Ordnung ein. So ist ein Widerstandsverhältnis von

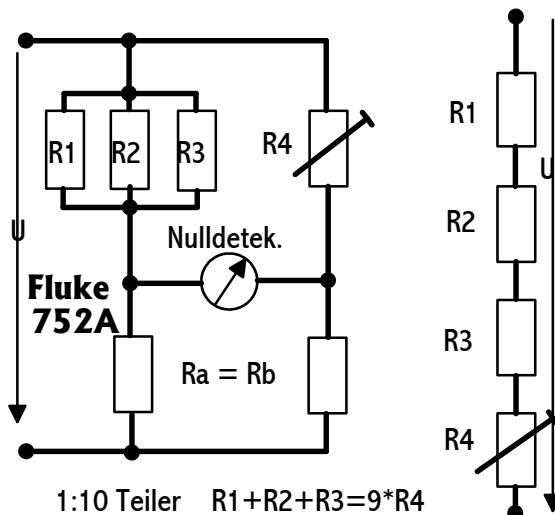
1:100 mit  $1 * 10^{-8}$  erreichbar. Es können auch Fehler durch Übergangswiderstände und ungleichmäßige Stromverteilung auftreten. Mit einem ähnlichen Trick kann man auch einen 1:10 Teiler bauen.  $3 * 100 k\Omega$  parallel und  $1 * 40k\Omega$  in Reihe und 1:2 abgleichen. Dann ergibt sich durch Umschalten von  $3 * 120k\Omega$  in Reihe und  $1 * 40k\Omega$  in Reihe ein 1:10 Teiler. Das 1:2 Teilverhältnis ist normalerweise an einer Brücke einfacher und genauer

auszumessen und wird zum Teil auch für automatisch Korrekturen verwendet, da die beiden 40 kOhm Widerstandswerte an einem hochauflösenden Meßgerät verglichen werden können.

$$\frac{R_S}{R_P} = \frac{3 \cdot R(1+d_V)}{\frac{R}{3} \cdot (1+d_V)} = 9 \quad (2.21)$$

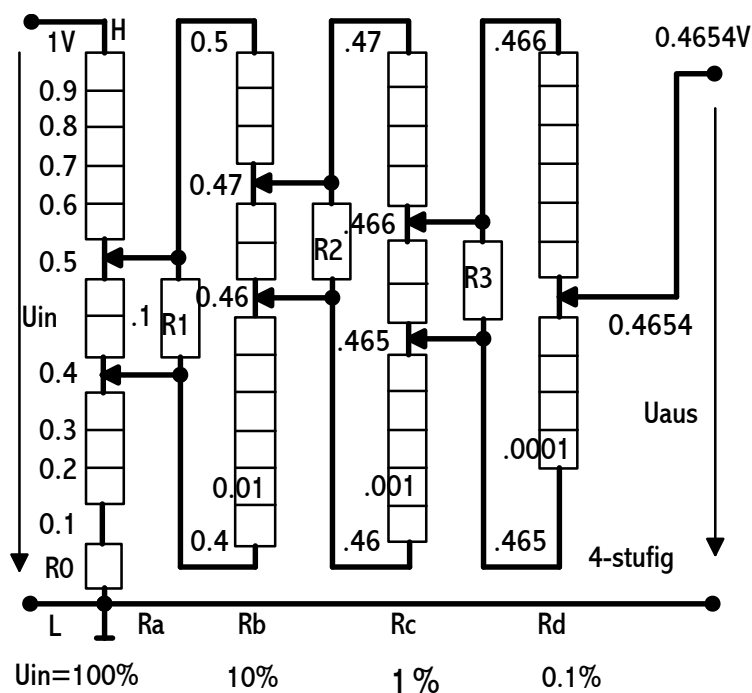
mit  $d_V = 1/3 \cdot (d_{R1} + d_{R2} + d_{R3})$  (Abweichungen) und  $R = R + d_R \cdot R$ . Die Gleichung 2.21 gilt nur, wenn  $d_R^2 \ll d_R$  zum Beispiel  $d = 1 \cdot 10^{-5} \Rightarrow d^2 = 1 \cdot 10^{-10}$ . Der untere Teil von 2.21 ist eine abgebrochene Reihenentwicklung für die Parallelschaltung.

**Beispiel:**  $R = 120.01 (1 \cdot 10^{-4})$  mit GL.2.21  $R_S/R_P = 9.0000075 (\sim 1 \cdot 10^{-6})$ . Fluke 752A 10/100:1 mit  $\pm 0.3 \text{ppm}$ .



1:10 Teiler  $R_1 + R_2 + R_3 = 9 \cdot R_4$

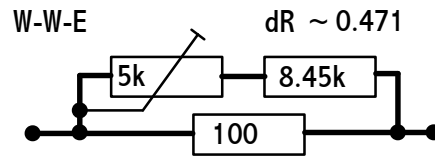
Der Kelvin-Varley-Teiler ist ein Verhältnisteiler mit einem Auflösungsvermögen von 0.1ppm. Der Eingangswiderstand ist in jeder Teilerstellung konstant und die maximale Eingangsspannung beträgt 1000 V (Fluke 720A). Jede der sechs oder sieben Teilerstufen besteht aus elf, die letzte aus zehn Einzelwiderständen, deren Werte nicht absolut, aber untereinander gleich sein müssen. Zudem muß der Gesamtwiderstand einer Dekade, einschließlich des Nebenwiderstandes, zwei mal so groß sein, wie der Stufenwiderstand der vorhergehenden Dekade. Zwischen den beiden Dekaden herrscht so Anpassung. Der Ausgangswiderstand ist unbestimmt.  $R_{IN} = 10 \cdot R_{AUS}$  Hier mit  $R_A = R_B = R_C = R_D = 10 \text{kOhm} \Rightarrow R_{IN} = 100 \text{kOhm}$ ;  $R_1 = R_2 = R_3 = 25 \text{kOhm}$ . Pro Dekade wird immer ein Zehntel der vorherigen Dekade abgegriffen um so den Ausgangsspannungswert einzustellen. Es ist immer die erste Widerstandskette auf jeden Fall mit zu benutzen! An R1 bis R3 fällt je ein Zehntel des Dekadenwertes ab, da zwei mal der Dekadenwiderstand parallel zum Eingangswiderstand der nächst niedrigeren Dekade,



der zwei Dekadenwiderständen in der Größe entspricht, insgesamt einen Widerstand von der Größe eines Dekadenwiderstandes ergibt; hier sind dies 10kOhm. Da an der ersten Dekade 100% der Eingangsspannung abfällt, muß diese am genauesten sein. Aus diesem Grund sind in Präzisionsteilern die ersten Stufen oft justierbar. Der Widerstand  $R_1$  ff. dient dazu die Bedingung, daß der Stufenwiderstand gleich dem Eingangswiderstand der nächsten Dekade sein



muß, zu erfüllen. Sonst wären die Reihe in ihren Werten so: 10k,2k,400,80 Ohm usw (1/5). Die Widerstände würden somit viel zu niederohmig. Üblich sind 3\*10kOhm und 4\*1kOhm. Um die Einzelwiderstände der ersten drei Stufen und die Parallelwiderstände abzugleichen, setzt man dort Waidner-Wolf-Elemente ein.  $R_0$  kann man als Bezugswiderstand ansehen und die anderen auf diesen mit einer Meßbrücke abgleichen, ebenso die Parallelwiderstände. Die Linearität des Kelvin-Varley-Teilers beträgt etwa 0.1ppm und die Stabilität 1ppm pro Jahr. Beim 720A von Fluke ist über eine eingebaute Brücke, mit einem Nullindikator, eine Eigenkalibrierung möglich.

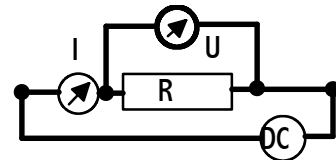


## 2.7 Meßtechnik

Um einen Gleichstromwiderstand zu bestimmen, gibt es viele Methoden und Schaltungen. Nur die bekannten werden hier behandelt. Die einfachste Art ist die Ohmmetermethode.

$$R = \frac{U}{I} \quad (2.22)$$

Die Abbildung zeigt die spannungsrichtige Messung, da der Strommesser auch den Spannungsmesserstrom mit bestimmt. Der Innenwiderstand des Spannungsmessers muß daher sehr groß gegenüber dem Prüfling sein. Entweder legt man eine bekannte Spannung an den Widerstand und mißt den Strom, wie dies in den einfachen Widerstandsmesser mit unlinearer Skala geschieht, oder man speist den Widerstand durch eine Konstantstromquelle und mißt den Spannungsabfall hochohmig. Bei fast allen modernen digitalen Multimetern ist dies im Ohmbereich der Fall. Es ist auch eine diskrete Strom-Spannungsmessung möglich, wenn die Quellenspannung (strom) unbekannt ist. Hierbei ist der Einfluß der Meßinnenwiderstände zu beachten. Der Spannungsmesser muß sehr hochohmig und der Strommesser sehr niederohmig sein, um das Ergebnis nicht zu sehr zu verfälschen. Außerdem sollte die Quelle während der Meßzeit stabil sein. Moderne Multimeter haben eine hochgenaue aktive Stromquelle zur Speisung und messen dann den Spannungsabfall am Prüfling.



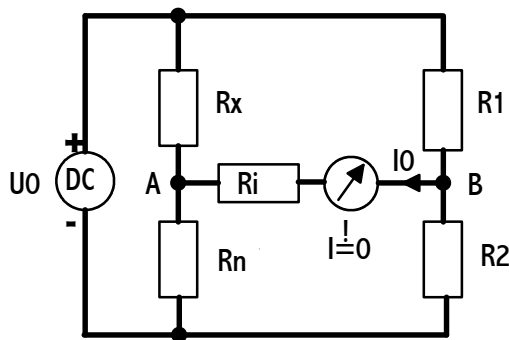
Eine große Bedeutung in der Präzisionsmeßtechnik hat die Brückenmethode. Es gibt vielerlei Schaltungen, wobei hier nur die drei bekannten behandelt werden. Bei allen Brücken wird ein Vergleich zwischen einem bekannten Normalwiderstand und einem Teilverhältnis mit dem Prüfling durchgeführt. Der Nullabgleich wird mit einem Anzeigeelement kontrolliert. Die Mutter aller Brückenschaltungen ist die Wheston Brücke. Sie besteht aus zwei parallelen Widerstandsteilern, gespeist von einer Gleichspannungsquelle deren Wert nicht genau bekannt, aber konstant sein muß und einem Nullindikator. Die folgenden Gleichungen aus den allgemeinen Maschen- und Knotenbedingungen zeigen die Ableitung und die Funktionsweise der Brückenschaltung.

$$U_{AB} = U_{R1} - U_{Rx} = \frac{R_1}{R_1+R_2} * U_0 - \frac{R_X}{R_X+R_N} * U_0 = \frac{R_1 * R_X + R_1 * R_N - R_1 * R_X - R_2 * R_X}{(R_1+R_2)*(R_X+R_N)} * U_0 \quad \Rightarrow$$

$$U_{AB} = \frac{R_1 * R_N - R_2 * R_X}{(R_1+R_2)*(R_X+R_N)} * U_0 \quad (2.23)$$

Für den Abgleich gilt:  $I_0=0 \Rightarrow U_{AB}=0 \Rightarrow$  mit Gl. 2.23  $R_1 * R_N - R_2 * R_X=0$  nach  $R_X$  aufgelöst:

$$R_X = R_N * \frac{R_1}{R_2} \quad I_0=0 \quad (2.24)$$



Bei der Speisung der Brücke aus einer Spannungsquelle ist das Verhalten der Brücke nur im Abgleich linear. Anders ist dies bei Konstantstromspeisung, hier gilt dann  $I_0 \sim dR$ . Für die Spannungsspeisung gilt [2;S.20], zur Berechnung der Brücken(un)empfindlichkeit in Gleichung 2.25.

$$I_0 = U_0 * \frac{R_X * R_2 - R_1 * R_N}{(R_1 + R_2) * (R_X * R_N + R_i * (R_X + R_N)) + R_1 * R_2 * (R_X + R_N)}$$

$$R_1 = \frac{R_X * R_2}{R_N} * (1 - \delta)$$

Alle fünf Widerstände werden als gleich ( $R$ ) angesetzt und mit  $I_0 = I_g$  ist der Grenzstrom, das ist der kleinste Anzeigestrom für den Nullindikator, gemeint ( $di = \text{detektierbare Stromänderung}$ ).

$$\delta = 8 * R * \frac{I_g}{U_0} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{8RI_g}{U_0} \quad (2.25)$$

Wie man sieht wächst mit der Stromstärke die Empfindlichkeit der Brücke, aber leider erhöht sich die Stromerwärmung gleichzeitig mit dem Quadrat der Stromstärke. Deswegen ist eine Erhöhung der Empfindlichkeit nach oben begrenzt. Die untere Grenze des Meßbereichs von  $R_X = 10 \text{ Ohm}$  ist durch die Leitungs- und Schalterwiderstände in der Brücke gegeben ( $0.1 \text{ Ohm} \Rightarrow > 0.1\%$ ). Die obere Grenze von  $R_X = 100 \text{ kOhm}$  wird durch die Leckwiderstände und die maximale Speisespannung und damit der Obergrenze für die Leistungs- und Spannungsbelastbarkeit für die Widerstände vorgegeben. Außerdem wird die Brücke im normalen Betrieb dann zu unempfindlich ( $10 \text{ MOhm} \Rightarrow > 0.1\%$ ). Die Teilerwiderstände liegen üblicherweise bei  $10 \text{ Ohm}$  bis  $1 \text{ kOhm}$ . Die Genauigkeit beträgt, bei einer Auflösung von  $1 \text{ ppm}$ ,  $0.01\%$ . Sehr gut sind die Brücken auch für Substitutionsmessungen zu gebrauchen. In diesem Fall interessiert die Auflösung, Stabilität und Reproduzierbarkeit und nicht die absolute Genauigkeit. Zudem muß die Empfindlichkeit und Auflösung des Nullinstrumentes hoch genug sein. Die Ausführungsformen sind Schleifdraht- und Drehschaltermeßbrücken oder auch Stöpselversionen. Die Schleifdrahtbrücken sind nicht ganz so genau, da sich ein Potentiometer nie so linear einstellbar ist. Auf Grund der kleineren Abmessungen findet sich diese Konstruktion fast immer in Handinstrumenten. Ein typisches Instrument in der Präzisionsmeßtechnik für den Nullabgleich ist das Galvanometer. Dieses Instrument hat einen Innenwiderstand von etwa  $100 \text{ Ohm}$  und eine hohe Stromempfindlichkeit im  $\text{pA}$  Bereich. Da das Nullinstrument ja die Spannungsdifferenz zwischen dem linken und dem rechten Zweig anzeigt, kann man für den rechten Zweig mit  $R_1$  und  $R_2$  auch zwei verstellbare genaue Spannungsquellen verwenden um ohne  $U_0$  ein Brückengleichgewicht zu erzeugen. Auf diese Weise läßt sich mit modernen Mitteln eine automatisch abstimmbare Brücke mit hoher Genauigkeit aufbauen. Dabei wird als Nullinstrument ein elektronisches Nanovoltmeter mit Auslesemöglichkeit verwendet.

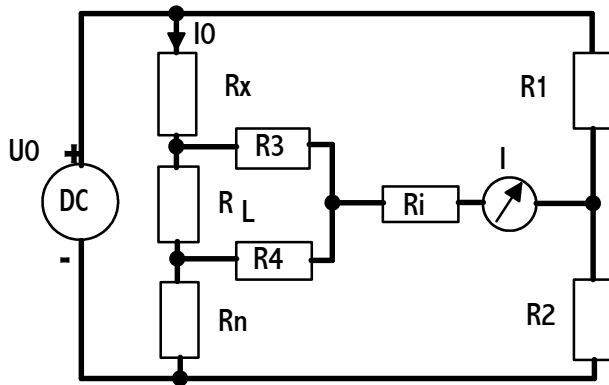
Um auch sehr kleine Widerstände messen zu können, wurde die Thomson-Brücke entwickelt, die man auch unter dem Namen Kelvindoppelbrücke kennt. Nach einer Dreieck-Stern-Umwandlung von  $R_3, R_4, R_L$  folgt die Abgleichbedingung von  $I = 0$ .

$$(R_N R_1 - R_X R_2) * (R_3 + R_4 + R_L) = R_L * (R_2 R_3 - R_1 R_4)$$

Mit der Bedingung  $R_2 * R_3 = R_1 * R_4$  folgt.

$$\frac{R_1}{R_2} \stackrel{!}{=} \frac{R_3}{R_4} \quad (2.26)$$

$$R_X = R_N * \frac{R_1}{R_2} = R_N * \frac{R_3}{R_4} \quad (2.27)$$



Es fällt der Leitungswiderstand  $R_L$  aus den Gleichungen weg.  $R_1, R_2, R_3, R_4$  sind mechanisch so gekoppelt, daß Gleichung 2.26 erfüllt ist, und  $R_1$  bis  $R_4 \gg R_X, R_N$  ist erfüllt. So wird der Strom durch die Brücke gering.  $R_X$  und  $R_N$  werden nur über die Potentialklemmen mit der Brücke verbunden und der Strom  $I_0$  über die Quelle eingespeist. Der Widerstandsbereich wird von 10 Ohm bis  $1 \cdot 10^{-6}$  Ohm angegeben. Die Meßunsicherheiten sind ähnlich wie die der Wheatstone-

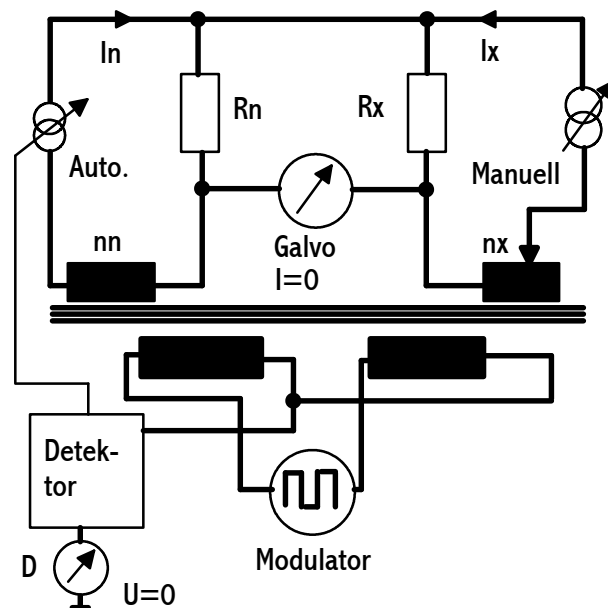
Brücke.

Das genaueste Instrument um Widerstände, besonders im Bereich 1mOhm bis 1kOhm, zu bestimmen, ist der Stromkomparator nach Kusters. Es wird das Widerstandsverhältnis in einer Substitutionsmessung zwischen einem externen Normalwiderstand und dem Prüfling bestimmt. Auch hier finden wir wieder eine Brückenschaltung vor. Zwei gegenläufig gewickelte Windungen haben bei gleichen Windungszahlen dann im Kern, hier ein hochpermeabler weichmagnetischer Ring, den Fluß Null erzeugt, wenn der Strom  $I_X = I_N$  ist. Allgemein gilt Gleichung 2.28.

$$\frac{I_X}{I_N} = \frac{n_N}{n_X} \quad (2.28) \quad \text{mit Det.}=0$$

$$\Phi_{Spule} = \int B * dA = \frac{\mu * A * n * I}{l} \quad (2.29)$$

Ob der Fluß, siehe Gleichung 2.29, null ist, kann bei Wechselstrom leicht mit einer Detektorwicklung festgestellt werden. Bei Gleichstrom muß durch eine Generatorwicklung dem Gleichfluß ein Wechselfluß überlagert werden. Dazu wird über eine weiter Wicklung die Flußdichte im Eisenkern bis zur Sättigung mit rechteckförmiger Wechselspannung moduliert. Nun können bei Brückenungleichgewicht kurze Spannungsspitzen mit einem Spitzenwertdetektor festgestellt werden. Dies sind die geradzahigen



(2.Ordnung) Oberschwingungsanteile des Modulationssignals. Die Bedingung, daß der Fluß Null sein soll entspricht der Aussage Detektor ist Null und wird von selbst mit dem Detektor und einer automatisch regelbaren Stromquelle erfüllt. Weiterhin muß gelten für das Galvanometer gleich Null:  $I_X * R_X = I_N * R_N$ .

$$\frac{I_X}{I_N} = \frac{R_N}{R_X} \quad ( 2.30)$$

Nur wenn beide Nullbedingungen erfüllt sind,  $G=0$  und  $D=0$ , kann aus Gleichung 2.28 und 2.30 der gesuchte Widerstand bestimmt werden.

$$R_X = R_N * \frac{n_X}{n_N} \quad (2.31)$$

Durch das Einstellen von  $n_X$  wird das Galvanometer zur Nullanzeige gebracht und so das Widerstandsverhältnis ablesbar. Um einen Teil Windungen zu sparen, werden auch Widerstände zur Stromteilung in den hinteren Dekaden, wo dies für die Gesamtunsicherheit nicht so bedeutend ist, eingesetzt, da der magnetische Fluß proportional zu  $n \cdot I$  ist. Auch  $n_N$  ist zur optimalen Anpassung umschaltbar (1,10,100,1000-Ohm) gemacht. Vorteile des Stromkomparators sind: vierpolige Widerstandsmessung, Thermospannungskompensation durch Polaritätsumkehr der Meßspannung, Meßgenauigkeit hängt hauptsächlich von einem Windungszahlverhältnis ab, welches nicht wie Widerstände mit der Zeit altern kann, Schalterprobleme fallen durch die Konstruktionsart fast weg.

$$\frac{P_N}{P_X} = \frac{R_X}{R_N} \quad (2.32)$$

Wie aus Gleichung 2.32 zu ersehen, können niederohmige Widerstände mit hohen Strömen gemessen werden, ohne das dies zu einer erhöhten Eigenerwärmung des Normal führt.

**Beispiel:** Guildline 9975 mit 9923 4polig 0.1mOhm bis 1MOhm  
 Auflösung bis zu 0.01ppm (0.1Ohm bis 10kOhm) Unsicherheit ohne Normal 0.2ppm  
 Meßunsicherheit PTB: 1Ohm  $\pm 0.5$ ppm; 0.1Ohm  $> \pm 10$ ppm 10kOhm  $> \pm 1$ ppm.  
 Rauschen 1nA bzw. 0.3 $\mu$ A

Bei allen Meßtechniken sind die folgenden Fehlerquellen zu beachten: Leitungswiderstände (nicht bei echter Vierpoltechnik); Leckwiderstände besonders bei hochohmigen Widerständen; Thermospannungen, die durch Umpoltechnik oder Messung in einer stromlosen Pause herausgerechnet werden können; Rauschen; Erwärmung von Prüfling und Normal; Temperaturkoeffizienten der Normal- und Teilerwiderstände.

Die Messung von Hochohmwiderständen kann mit normalen Brückenschaltungen erfolgen, was aber wegen der hohen Zeitkonstanten und begrenzten Meßspannungen zu Problemen führt. So ist bei 10 pF Zuleitung und 1 TOhm Widerstand schon eine Zeitkonstante von 10 Sekunden zu beachten. Auch die beträchtliche nichtlineare Spannungsabhängigkeit der Prüflinge hat eine optimale Meßspannung von nur 10 Volt in Ausnahmefällen 100 Volt ergeben. Daher muß den Prüflingen eine längere Einlaufphase zugebilligt werden. Auf eine sorgfältige elektrostatische Schirmung muß geachtet werden. Bei der Keithleymeßbrücke wird daher der Prüfling in der Brücke hinter einer Klappe vermessen. Eine Bestimmung des Widerstandes über eine Entladung mit einem Kondensator kommt wegen der geringen Unsicherheit nicht in Betracht, obwohl sich dies gerade für extrem hohe Widerstände anbietet.

Die auf dem Markt befindlichen hochauflösenden Digitalvoltmeter bieten auf einfache Weise die Möglichkeit Substitutionsmessungen im mittleren Widerstandsbereich mit geringsten Meßunsicherheiten durchzuführen. Die Multimeter besitzen dazu für die Bereiche umschaltbare Präzisionskonstantstromquelle, die einen geringen Meßstrom durch den Widerstand leiten und so einen Spannungsabfall erzeugen. Dieser wird mit dem Spannungsmeßmodul bestimmt und aus der Umrechnung mit dem ohmschen Gesetz ergibt sich dann der Widerstandswert. Die Messung von Normal und Prüfling mit gleichem Nennwert und im selben Meßbereich müssen zeitlich kurz hintereinander und wechselseitig mehrere Male durchgeführt werden, um aus den Meßwerten den Mittelwert und die Standardabweichung zu bestimmen. Unter Verwendung von Präzisionsschaltern, die thermospannungsarm und vierpolig ausgelegt sein müssen, läßt sich diese Verfahren auch automatisieren. Für die Substitution mit den Anzeigen (A) beider Messungen und Widerstandswerten gilt die Gleichung 2.33.

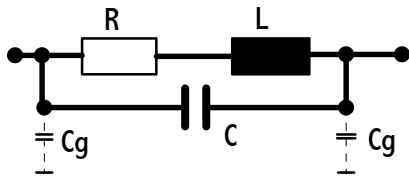
$$R_X = \frac{A_X}{A_N} * R_N \quad (2.33)$$

Für die Unsicherheitsberechnungen werden außer der Standardabweichung und der Unsicherheit des Normals die 24-Stunden Spezifikationen (Stabilitätsangabe) oder ein Zehntel der Jahresspezifikationen für das Multimeter herangezogen. Diese Spezifikationen können dann je nach Hersteller in den Bereichen 100 Ohm bis 1MOhm zwischen 1.5ppm und 3.5ppm liegen.

**Beispiel:** Für eine 100 kOhm-Substitution ergibt dies in der Praxis eine Abweichung vom wahren Wert einschließlich der Unsicherheit des Normals zwischen 0.1ppm und 1.7ppm.

### 2.8 Wechselstromwiderstände

Diese Widerstände sind zwar nicht so gut wie Gleichstromnormalwiderstände, aber zeigen dafür durch ihre spezielle Konstruktion ein recht gutes Wechselstromverhalten zum Teil bis in den GHz-Bereich hinein. Dazu muß der induktive Anteil L und der kapazitive Anteil C des Widerstandes möglichst klein gehalten werden. Es gibt leider mehrere komplexe Gleichungen



und Ersatzschaltbilder um den realen Widerstand zu beschreiben. Am allgemeinsten und gebräuchlichsten ist das mit R und L in Reihe parallel zu C. Hier wurden schon die Kapazitäten gegen das Gehäuse Cg und die Zuleitungsinduktivitäten vernachlässigt, beziehungsweise sie sollen mit im Modell enthalten sein.

$$\underline{Z} = \frac{(R+j\omega L) * \frac{1}{j\omega C}}{(R+j\omega L) + \frac{1}{j\omega C}} \quad (2.34)$$

$$\underline{Z} = \frac{R+j\omega L}{j\omega CR - \omega^2 LC + 1} * \left( \frac{1 - \omega^2 LC - j\omega CR}{\dots} \right) \quad \text{kürzen (*1) und zusammenfassen} \Rightarrow$$

$$\underline{Z} = \frac{R+j\omega(L - \omega^2 L^2 C - CR^2)}{1 + \omega^2(C^2 R^2 - 2LC + \omega^2 L^2 C^2)} \quad (2.35)$$

$$|\underline{Z}| = Z = \frac{\sqrt{R^2 + (L(1 - \omega^2 LC) - R^2 C)^2}}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (R\omega C)^2} \quad (2.36)$$

Eine andere Art der Auflösung (\*jwC) von Gleichung 2.34 lautet folgendermaßen.

$$\underline{Z} = \frac{R+j\omega L}{j\omega CR - \omega^2 LC + 1} \quad (2.37) \quad \text{bzw.} \quad |\underline{Z}| \approx R * \sqrt{\frac{1 + (\frac{\omega L}{R})^2}{1 + (\omega CR)^2}} \quad (2.38)$$

$$f_{Res.} = \frac{1}{2\pi} * \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (2.39)$$

Bei Gleichung 2.38 wurde der Term LC aus 2.37 vernachlässigt. Die Resonanzfrequenz aus Gleichung 2.39 ergibt sich mit dem Ersatzschaltbild des Widerstandes, das dem eines Parallelschwingkreises entspricht. Die Gleichung 2.35 kann vereinfacht werden wenn die L-Teile größer und die C-Teile kleiner als R sind. Da die Produkte L<sup>2</sup>\*C, C\*C, L\*C und L<sup>2</sup>\*C<sup>2</sup> sehr klein gegenüber den anderen Termen sind, da L und C < 1\*10<sup>-4</sup> diese Werte haben. Auch Gleichung 2.38 zeigt, daß bei niederohmigen Widerständen der Zähler und bei hochohmigen Widerständen Nenner unter der Wurzel groß werden.

$$\underline{Z} \approx R + j\omega(L - CR^2) = R * (1 + j\omega(\frac{L}{R} - RC)) \quad (2.40)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2(L - CR^2)^2} \quad (2.41)$$

Im Idealfall wäre der Imaginärteil gleich Null und aus Gleichung 2.40 folgt dann L=C\*R<sup>2</sup>.

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.42)$$

Wenn R diesem Verhältnis entspricht, dann ist so  $\underline{Z} = R$  und der Widerstand somit reell. Man kann auch die Gleichungen mit Zeitkonstanten beschreiben.

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad \tau_C = R * C \quad \tau = \tau_L - \tau_C \quad (2.43)$$

$$\underline{Z} = R * (1 + j\omega\tau) \quad (2.44)=(2.40)$$

Gleichung 2.34 kann für die Zeitkonstantenbetrachtung in Leitwertform angegeben werden.

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} * \frac{1 - j\omega\tau + j\omega^2 LC * \omega\tau_L}{1 + \omega^2\tau_L^2} \quad (2.45)$$

Aus den Gleichungen ist zu ersehen, daß kleine Widerstände induktiv (zB. Skineffekt) sind ( $R < 300 \text{ Ohm}$  ;  $L/R > R * C$ ) und große Widerstände kapazitiv wirken ( $R > 500 \text{ Ohm}$ ;  $L/R < R * C$ ). Dies zeigt auch Gleichung 2.40. Es gilt mit R klein ( positiv) =>  $C * R^2$  klein gegenüber L und R groß ( negativ) =>  $C * R^2$  groß gegenüber L.

**Beispiel:**  $C = 0.8 \text{ pF}$ ;  $L = 80 \text{ nH}$ ; =>  $R = 316 \text{ Ohm}$  ; GL. 2.42. All. Zeitkonst.  $< 1 * 10^{-9} \text{ sec}$ .

Auf Grund der gewonnen Erkenntnisse kann man für den untern und den oberen Frequenzbereich ein eigenes sehr einfaches Ersatzschaltbild vereinbaren.

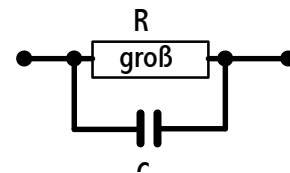
$$\underline{Z} = R + j\omega L \quad (2.46)$$



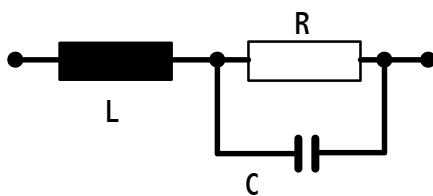
$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (2.47)$$

$$\underline{Z} = \frac{R - j\omega CR^2}{1 + (\omega C)^2 R^2} \quad (2.48)$$

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega C)^2 R^2}} \quad (2.49)$$



Man beachte, daß das gedachte C nicht ideal ist und einen realen frequenzabhängigen Verlustfaktor besitzt;  $R_C = 1/(D\omega C)$ . Ein weiteres Ersatzschaltbild von HP vorgeschlagen ergibt etwas andere Formeln.



$$\underline{Z} = j\omega L + \frac{R * \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (2.50)$$

$$\underline{Z} = \frac{j\omega L * (1 + j\omega RC) + R}{1 + j\omega RC} * \left( \frac{1 - j\omega RC}{\dots} \right) \Rightarrow$$

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j \frac{\omega L - \omega CR^2 + \omega^3 LC^2 R^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (2.51)$$

Bei der Gleichung fällt besonders auf, daß gegenüber Gl. 2.40 der Realteil hier frequenzabhängig ist. Diese Teil bezeichnet man auch als  $R_S = \text{ESR} = \text{Equivalent-Series-Resistor}$ . Mit der Zeitkonstante folgt die Gleichung 2.52 (siehe Bode -40dB/Dekade Addition).  $R_S$  ist der Gleichung 2.35 ähnlich, wenn man dort nur den Realteil beachtet und im Nenner die LC-Terme vernachlässigt.

$$R_S = R * \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} = R * \frac{1}{1 + (\omega\tau_C)^2} \quad (2.52)$$

Genrad gibt noch einen  $R_P = \text{EPR} = \text{Equivalent-Parallel-Resistor}$  an, der für niedrige Widerstände den Verlauf bestimmt und eine stärkere Wirkung wie Gl. 2.47 hat.

$$R_p = R(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}) \quad (2.53)$$

Mit den Gleichungen wurden reale Widerstände zwischen 0.01 Ohm und 1M Ohm berechnet.

$$\omega = 2\pi f \quad (2.54)$$

**Beispiel:** Z1~ 0.8pF / 80nH (ALU-Visha); Z2~2.5pF / 100nH (<100Ohm) bis 3μH (>100Ohm)(GR 1440). Folgende Übereinstimmung von Formel und Praxis (Nur Frequenzgang):

0.01bisOhm 100 Ohm	Gl. 2.47 = Gl. 2.41 Gl. 2.53	Wert steigt mit f Wert steigt stark mit f
1kOhm	Gl. 2.49 = Gl. 2.52 Gl. 2.36 = Gl. 2.47 Gl. 2.41	Wert sinkt mit f Wert steigt mit f Wert steigt schwach mit f
10k bis 1M Ohm	Gl. 2.34=2.53 Gl. 2.36 = Gl. 2.52 Gl. 2.49	Wert steigt stärker mit f Wert sinkt mit f Wert sinkt nicht so stark mit f

Widerstand[Ohm]	Gl.	Alu ±0.1%	±0.01%	1440 ±0.1%	±0.01%	je Fr.
0.01	2.47=2.41			1k	200	
	2.53			500	200	
0.1	2.47=2.41			7k	2k	
	2.53			5k	2k	
1	2.47=2.41	90k	30k	60k	20k	
	2.53			50k	20k	
10	Messung	100k	30k			
	2.47=2.41	900k	300k	600k	200k	
100	2.53			500k	200k	
	Messung	500k	100k			
1k	2.47=2.41	9M	3M	100k	50k	
	2.53			100k	30k	
1k	Messung	800k	200k			
	2.47	>11M	>11M	2M	700k	
10k	2.49	9M	2M	3M	800k	
	2.41	10M	3M	>10M	5M	
10k	2.53			1M	300k	
	Messung	700k	200k			
100k	2.36=2.52	600k	200k	200k	70k	
	2.49	900k	300k	300k	90k	
100k	Messung	200k	40k			
	2.36=2.52	60k	20k	20k	7k	
1M	2.49	90k	30k	30k	9k	
	Messung	50k	10k			
1M	2.36=2.52	6k	2k	2k	700	
	2.49	9k	3k	3k	900	
	Messung	10k	2k			

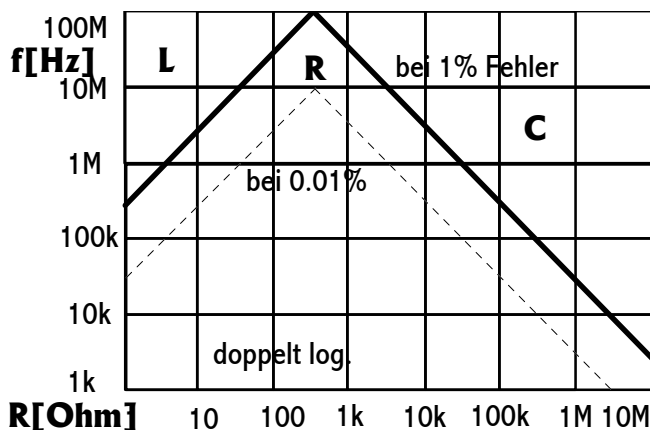


10M	2.36=2.52	600	200
	2.49	900	300
	Messung	1k	

Werte	DC[%]	1	10	100	1k	10k	100k	1M [Ohm]	Fr. bei 0.1% (Herst.)
Genrad (1440)	0.01	300k	1M	3M	2M	200k	20k	2K	Einzel: 10ppm/Jahr
Genrad (1433)	0.02+2m	500k	1M	4M	3M	200k	10k	1k	Decade
zu 1433: $L_0=0.1\mu H+0.2\mu H$ je Stellung;		$C_0\sim 15pF$ je Decade bis zu 45pF => Frequenzgang mit 2.52.							

Aus den Beispielen ergibt sich für die Messung der Widerstände:

Widerstand bis 1kOhm	Seriensatzschaltbild
Widerstand über 1kOhm	Parallelersatzschaltbild



Bei sehr hochohmigen Widerständen kann der Imaginärteil  $X_{CP} < R$  sein. Allgemein bedeutet, wie über die Berechnungen nachzukontrollieren ist, eine Erniedrigung der Unsicherheit um den Faktor 100 eine Frequerniedrigung um den Faktor 10 ( $1\% = 270kHz \Rightarrow 0.01\% = 27kHz$ ).

$$\Delta 10\% = 3 * f_{1\%}$$

**Beispiel:**  $1\% = 100kHz \Rightarrow 10\% = 300kHz$   
Die Resonanzfrequenz des Widerstandes bestimmt sich mit Gleichung

2.39. Besonders bei drahtgewickelten Widerständen und hohen Frequenzen macht sich der Skineffekt bemerkbar, das heißt die Induktivität ist dominant bei niederohmigen Werten. Allgemein wird durch spezielle Wickeltechniken (bifilar, Ayrton-Perry-Kreuzwicklung) der Induktivitätswert klein gehalten. Die Kapazitäten entstehen zwischen den Windungen zum Windungskörper oder gegen Erde-Masse. Um bei großen Widerständen kapazitätsarm zu wickeln, werden die Windungen in Abschnitte unterteilt. Kompensation ist nur dann möglich, wenn die Drahtlänge  $> 1/8$  der Betriebswellenlänge ist. Präzisionswiderstände für niedrige Wechselspannung waren früher fast immer drahtgewickelt, jedoch für höhere Frequenzen sind spezielle Schichtwiderstände vorhanden. Gute Eigenschaften haben auch runde, normale Kohle- und Metallfilmwiderstände. Bei Hochstromwiderständen, die niederohmig sind, ist der induktive Anteil dominant. Deswegen steigt der Widerstandswert bei 20kHz und 2A um 0.03% und bei 10A um 0.7% an. Dies gilt nur für Präzisionswiderstände und liegt bei normalen Wechselstromwiderständen bei etwa 0.5% um 10kHz und weniger als 10A.

Besonders störend macht sich bei Leitern der Skineffekt als eine Erhöhung des Widerstandes und der Induktivität im schnellen Wechselfeld bemerkbar. Der Strom wird dabei durch innere magnetische Felder an den Außenrand des Leiters gedrängt und fließt daher in einem kleineren effektiven Querschnitt. Es sind die Gleichungen 2.55 bis 2.57 gültig.

$$x_s = \frac{r}{2} * \sqrt{\pi f \sigma \mu} \quad (2.55)$$

$$R = R_0 * (1 + \frac{1}{3} * x_s^4) \quad (2.56) \quad \text{für } x_s < 1$$

$$R = R_0 * (x_s + \frac{1}{4} + \frac{3}{64 * x_s}) \quad (2.57) \quad \text{für } x_s > 1$$



Es ist  $r$  der Radius des Drahtes in cm,  $f$  die Frequenz in Hz,  $\sigma=57 \cdot 10^4$  bei Kupfer und  $\mu=1.257 \cdot 10^{-8}$ . Mit  $R_0$  ist der Gleichstromwiderstand gemeint und die Gleichungen 2.56 und 2.57 können durch Umformen die Widerstandserhöhung als Faktor  $(R/R_0)$  angeben. Die Erhöhung des Widerstandes bei großen Frequenzen tritt in der Realität durch die starke kapazitive Komponente der hochohmigen Widerstände nicht in Erscheinung.

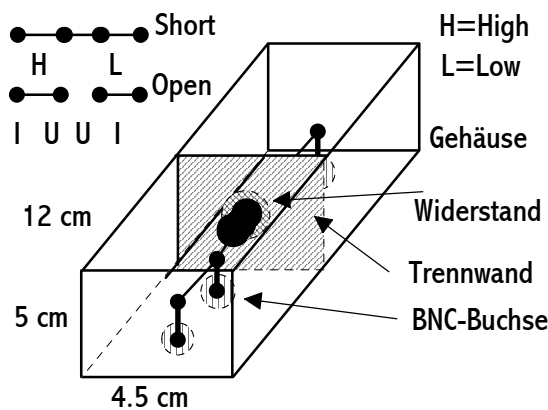
**Beispiel:** Durchmesser eines Kupferdrahtes  $d=0.5\text{mm} \Rightarrow r=0.025\text{cm}$ . Für verschiedene Frequenzen gilt für  $R/R_0$  (Faktor der Widerstandserhöhung nur durch Skineneffekt):

1kHz:1.000004; 10kHz:1.00040; 100kHz:1.041 (+4%!) 1Mhz:2.17 10Mhz:6.16 100Mhz:19.05  
 Bei einem Kabel von  $d=1\text{mm}$  gilt: 10kHz:1.006 100kHz:1.47 1Mhz:4 10Mhz:12.

Größe	Kohle	Metalloxid	Draht	Metall-Schicht
Werte[Ohm]	10-20M	10-5M	0.1-10M	1-1M
TK [% / °C]	$\pm 0.05-0.15$	0.05	0.005	0.001
Sp.Koeff. [% / V]	-0.02	-0.005	-	-
C [pF]	0.2-0.5	0.3-0.6	0.8	0.5
L [ $\mu\text{H}$ ]	-	-	0.03-2.5	0.08

TK von Widerständen liegt bei  $1\mu\text{V}$  bis  $30\mu\text{V}$

Ein Stück dünner Draht hat schon eine Induktivität von etwa 10nH pro cm. Daher ist der Aufbau eines Normals für RLC-Brücken in einem speziellen Gehäuse von großer Wichtigkeit. Als Beispiel dient hier ein vierpoliges Wechselspannungswiderstandsnormal. Es besteht aus

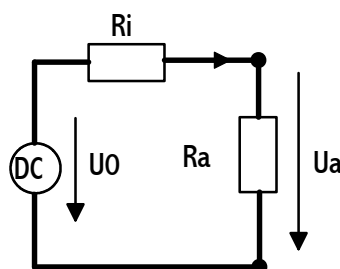


einem Metallgehäuse, das mit vier BNC-Buchsen, zum Anschluß von RLC-Meßbrücken, versehen ist. In der Mitte befindet sich innen eine Metalltrennwand mit einer Öffnung für die Meßwiderstände, die eine kapazitive Abschirmung zwischen den positiven und negativen Buchsen bewirkt. Um korrekte Messungen an den Meßbrücken durchführen zu können, gibt es sowohl ein OPEN-Normal, als auch ein SHORT-Normal für die Kalibriermessung. Dadurch werden die induktiven und kapazitiven Anteile des Gesamtaufbaus

herausgemessen und nur noch die geringen störenden Anteile des Meßwiderstandes sind zu beachten.

### 2.9 Sondermessungen

Den Innenwiderstand  $R_I$  am Ausgang einer Quelle kann man durch zwei Spannungsmessungen (Index:1/2) mit zwei verschiedenen Lasten  $R_A$  ermitteln.



$$R_I = \frac{U_{A1} - U_{A2}}{\frac{U_{A2}}{R_{A2}} - \frac{U_{A1}}{R_{A1}}} \quad (2.58)$$

Wenn die erste Messung im Leerlauf durchgeführt wird, mit  $U_{A1}=U_0$ , gilt mit  $R_{A1} = \infty$  Gleichung 2.58.

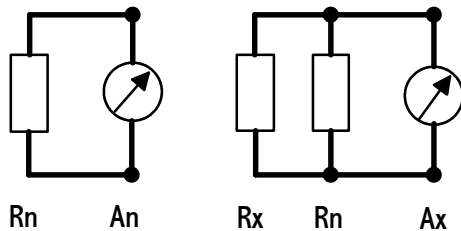
$$R_I = R_{A2} * \frac{U_{A1} - U_{A2}}{U_{A2}} \quad (2.59)$$

**Beispiel:**  $U_0 = 15V$ ;  $U_{A1} = 10V$ ;  $R_{A1} = 2 * R$ ;  $U_{A2} = 5V$ ;  $R_{A2} = 0.5 * R \Rightarrow$  Gl. 2.58  $R_I = R$

Für die übliche Substitution, bei der die Anzeige von Normal und Prüfling in Verhältnis gesetzt und mit dem wahren Wert des Normal verrechnet wird, gilt die Standardgleichung 2.60. Sie wird aus der Beziehung ( $A_X/A_N = R_X/R_N$ ) abgeleitet, wobei A=Anzeige bedeutet und der Index N=Normal und X=Prüfling.

$$R_X = R_N * \frac{A_X}{A_N} \quad (2.60)$$

Bei der Parallelsubstitution, wird zu einem Normal ein Prüfling parallel geschaltet und für beide Fälle die Anzeige ermittelt und so  $R_X$  bestimmt. Diese Meßart kann angewendet werden, um hochohmige Widerstände in einem niedrigeren Meßbereich zu bestimmen



$$\frac{A_N}{A_X} = \frac{R_N}{\frac{R_N * R_X}{R_N + R_X}} = \frac{R_N + R_X}{R_X}$$

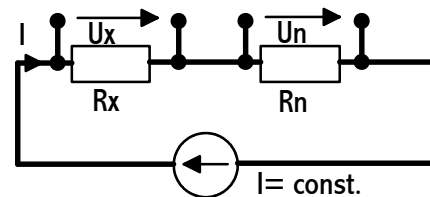
$$R_X = \frac{R_N * A_X}{A_N - A_X} \quad (2.61)$$

**Beispiel:**  $R_N = 1.00004 MOhm$ ;  $A_N = 1.00005 MOhm$ ;  $A_X = 0.909089 MOhm \Rightarrow R_X = 9.99467 MOhm$ . Messungen erfolgen beide im 1MOhm Bereich!

Bei der Messung der Widerstände bei gleichem konstanten Laststrom, die in Reihe geschaltet werden, ist eine zweifache Spannungsmessung nötig. Erste Messung  $U_X =$  Prüfling und zweite  $U_N =$  Normal.  $I = (U_X/R_X) = (U_N/R_N) \Rightarrow$

$$R_X = \frac{U_X}{U_N} * R_N \quad (2.62)$$

Die Gesamtunsicherheit bei den Substitutionsmessungen, siehe Kapitel 23, wird üblicherweise mit der quadratischen Addition der Meßunsicherheit des Verfahrens und der Unsicherheit des Normal bestimmt. Wenn der eingepreßte Strom unstabil ist, was bei großen Strömen und Speisung mit Netzteilen zu erwarten ist, sollten zwei gleiche Multimeter parallel betrieben werden und manuell gleichzeitig getriggert werden, bei gleicher Messzeit. So werden die Stromschwankungen unterdrückt, da sie ja gleichzeitig auf beide Messungen wirken.



## 2.10 Messunsicherheitsberechnung

Für die zwei Standardmessungen von Widerständen werden die Messunsicherheiten mit Berechnungsbeispiel vorgestellt

### 2.10.1 Substitutionsmessung von Widerständen

Bei der Substitutionsmessung werden die beiden Anzeigewerte von Normal und Prüfling mit dem Normalwert zum Wert des Prüflingwiderstands berechnet.

$$R_P = R_N * \frac{A_P}{A_N} \quad (2.63)$$

**Zu Gl. 2.63:** Mit allgemein:  $R_P = A_P * MB$  und  $R_N = A_N * MB$  für die beiden Messungen mit  $MB =$  Meß- Brücken-Faktor.  $MB$  ist für beide Messungen konstant anzusetzen, da Widerstände gleichen Nennwerts verglichen werden.  $MB = R_N/A_N$  in Gleichung für  $R_P$  eingesetzt ergibt:  $R_P = R_N * A_P/A_N$ .

Die Meßunsicherheit wird geringer als bei der Direktmessung und hängt stark von der Meßunsicherheit des Normals ab.

Zur Berechnung des Meßergebnisses und Bestimmung der Meßunsicherheit wird die Modellgleichung benötigt. Im Gegensatz zu Fehleranalysen nach der alten DKD-3 Vorschrift, die sich in etwas anderer Form präsentierte, wird jetzt in der Modellgleichung nicht nur die Berechnung der Meßunsicherheit aufgestellt, sondern und das ist neu gleichzeitig die Berechnung des Meßwertes. Die einzelnen Terme erscheinen dann in einer Gesamttabelle mit ihren Zahlenwerten.

So gilt für die Modellgleichung bei Substitutionsmessung:

$$\text{Meßergebnis des Prüflings} = \text{Normalwert} \otimes \text{Anzeigeverhältnis} \oplus \text{Unsicherheitsterme} (\delta_X)$$

Der Normalwert wiederum setzt sich aus dem eigentlichen Wert des Normals und den zugehörigen Meßunsicherheitsanteilen zusammen.

Es gelten die folgenden Abkürzungen:

$R_P$ : Meßergebnis des Prüflings; Ergebnis der Messung mit Berechnung

$R_N$ : Wert des Widerstandsnormal; kalibriert bei der PTB  
diese Variable beinhaltet auch die eigene Meßunsicherheit nach PTB-Kalibrierschein

$R_N^\#$ : Gesamtgleichung für das Widerstandsnormal mit Meßunsicherheiten

$\delta u_{x1}$ : Temperatureinfluß auf das Normal. Er ergibt sich aus den Umgebungstemperaturschwankungen (Bezugswert 23°C).  $\delta u_{x1} = k_t \cdot \Delta T$

Hierbei ist  $k_t$  der Temperaturkoeffizient des Widerstands

$\delta u_{x2}$ : Abgeschätzte zeitliche Inkonzanz, die sich aus der Drift (Alterung) ergibt.

$A_N$ : Anzeigewert bei der Messung des Normals

$A_P$ : Anzeigewert bei der Messung des Prüflings

$\delta A_{R0}$ : Unsicherheit bei der Nullung mit einem Kurzschluss

$\delta R_P$ : Unterschied der beiden Widerstände hier wegen Temperatureinfluß ( $\pm 0,1\text{K}$  in Öl)

$\delta Lin$ : Linearitätseinfluß des Messinstruments ist 1/10 der Meßunsicherheit

$\delta Auf$ : Auflösung des Messinstruments

$\delta Verf$ : Einflüsse durch das Verfahren; z.B: Anschlußtechnik

$c$ : Sensitivitätskoeffizient - Ableitung der Modellgleichung nach allen Veränderlichen

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (2.64)$$

Für die Modellfunktion gilt:

$$R_P = R_N^\# \cdot \frac{A_P}{A_N} - \delta R_P - \delta A_{R0} + \delta Lin + \delta Auf + \delta Verf \quad (2.65)$$

$$\text{mit dem Normal: } R_N^\# = R_N + \delta u_{x1} + \delta u_{x2} \quad (2.66)$$

Für die Bestimmung der Sensitivitätskoeffizienten ( $c$ ) muß die Gleichung (2.65) nach allen veränderlichen Variablen abgeleitet werden. Da sich in der Gleichung (2.66) für das Ergebnis der einzelnen Terme als Summe darstellt, kann für diese ein gemeinsamer Sensitivitätskoeffizient bestimmt werden, wie in Tabelle 1 zu erkennen ist.

$$\frac{\partial R_P}{\partial R_N^{\#}} = \frac{A_P}{A_N} = c_1 \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial A_P} = R_N^{\#} * \frac{1}{A_N} = c_2 \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial A_N} = R_N^{\#} * \frac{-1 * A_P}{A_N^2} = c_3 \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial \delta R_P} = -1 = c_4 \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial \delta A_{Ro}} = -1 = c_5 \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial \delta Lin} = 1 = c_6 \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial \delta Auf} = 1 = c_7 \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial \delta Verf} = 1 = c_8 \quad (2.74)$$

Aus sechs Messungen von 100 Ohm mit HP3458 wurden die folgenden Werte ermittelt.:

Nr.	A <sub>N</sub>	A <sub>P</sub>
1	100,002 07 Ohm	100,008 12 Ohm
2	100,002 09 Ohm	100,008 06 Ohm
3	100,002 05 Ohm	100,008 18 Ohm
4	100,002 11 Ohm	100,008 07 Ohm
5	100,002 00 Ohm	100,008 20 Ohm
6	100,002 01 Ohm	100,008 10 Ohm
<b>Mittelwert:</b>	<b>100,002 055 Ohm</b>	<b>100,008 122 Ohm</b>
<b>rel. Std.abw.:</b>	<b>4,4 * 10<sup>-7</sup></b>	<b>5,7 * 10<sup>-7</sup></b>

Der Wert des Normalen beträgt:

R<sub>N</sub>=100, 002 22 Ohm mit einer erweiterten Meßunsicherheit von U<sub>Kal</sub>=3\*10<sup>-6</sup>.

$$u_{Kal} = \frac{U_{Kal}}{2} \quad (2.75)$$

Für die empirische Standardabweichung  $s(\bar{X})$  des Mittelwerts, die aus n Messungen für einen arithmetischen Mittelwert  $\bar{X}$  ermittelt wurde und die Standardmessunsicherheit  $u(\bar{X})$ , gelten die folgenden Gleichungen.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} * \sum_{j=1}^n x_j \quad (2.76)$$

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} * \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} \quad (2.77)$$

$$u(\bar{x}) = s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} \quad (2.78)$$

Durch Einsetzen der Meßwerte in die Gleichungen für  $c_1$  bis  $c_3$  werden die Koeffizienten bestimmt. Für  $c_1$  gilt zum Beispiel:

$$c_1 = \frac{100,008122 \text{ Ohm}}{100,002055 \text{ Ohm}} = 1,00006$$

Größe ( $X_i$ )	Schätzwert ( $x_i$ )	Standardmeßunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitätskoeffizient $c_i$	Unsicherheitsbeitrag $u_{i(y)}$
$R_N$	100,002220 Ohm	$3 \cdot 10^{-6}/2 \cdot 100,0020 \text{ Ohm}$	Normal	$c_1 = 1,0$	$1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Ohm}$
$\delta u_{x1}$	0	$1,4 \cdot 10^{-7}/\sqrt{3} \cdot 100,002 \text{ Ohm}$	Recht.	$c_1 = 1,0$	$8,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm}$
$\delta u_{x2}$	0	$2 \cdot 10^{-6}/\sqrt{3} \cdot 100,002 \text{ Ohm}$	Recht.	$c_1 = 1,0$	$6,7 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm}$
$A_P$	100,008120 Ohm	$5,7 \cdot 10^{-7}/\sqrt{6} \cdot 100,008 \text{ Ohm}$	Normal	$c_2 = 1,0$	$2,3 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm}$
$A_N$	100,002060 Ohm	$4,4 \cdot 10^{-7}/\sqrt{6} \cdot 100,002 \text{ Ohm}$	Normal	$c_3 = -1,0$	$-1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm}$
$\delta R_P$	0	$1,4 \cdot 10^{-7}/\sqrt{3} \cdot 100 \text{ Ohm}$	Recht.	$c_4 = -1$	$-8,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm}$
$\delta A_{R0}$	0	$0,00001 \text{ Ohm}/\sqrt{3}$	Recht.	$c_5 = -1$	$-5,8 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm}$
$\delta Lin$	0	$1 \cdot 10^{-6}/\sqrt{3} \cdot 100 \text{ Ohm}$	Recht.	$c_6 = 1$	$5,8 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm}$
$\delta Auf$	0	$1 \cdot 10^{-7}/\sqrt{6} \cdot 100 \text{ Ohm}$	Dreieck	$c_7 = 1$	$4,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm}$
$\delta Verf$	0	$0,00001 \text{ Ohm}/\sqrt{3}$	Recht.	$c_8 = 1$	$5,8 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm}$
<b><math>R_P</math></b>	<b>100,008290 Ohm</b>	-	-	-	<b><math>1,77 \cdot 10^{-4} \text{ Ohm}</math></b>

$$U = k \cdot \sqrt{\sum u_i^2(y)} \quad (2.79)$$

Erweiterte Meßunsicherheit mit  $k=2$ :  $U=2 \cdot 0,000177 \text{ Ohm} = 0,00035 \text{ Ohm}$

Vollständiges Meßergebnis:  $R_P = (100,00829 \pm 0,00035) \text{ Ohm}$

Die Auflösung ( $\delta Auf$ ) für die zwei Messungen ( $A_P$  und  $A_N$ ) mit Rechteckverteilung ergibt eine Dreieckverteilung mit  $2 \cdot (5 \cdot 10^{-8})$ .

### 2.10.2 Direktmessung von Widerständen

Bei der Direktmessung wird der Widerstandswert eines Prüflings nach der Kurzschlusskalibrierung an dem Meßgerät bestimmt. Hierbei wirkt sich die eigene Messunsicherheit des Meßgerätes in erheblichem Maße auf die Gesamtmeßunsicherheit aus. Nach der Kurzschlusskalibrierung, ist aus sechs Anzeigen der Mittelwert 100,008122 Ohm mit einer relativen Standardabweichung von  $5,7 \cdot 10^{-7}$  in einer Beispielmessung ermittelt worden.

$$R_P = A_P - \delta A_{R0} + \delta Dvm + \delta Auf + \delta Verf \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial A_P} = 1 = c_1 \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial \delta A_{R0}} = -1 = c_2 \quad (2.82)$$

Die Ergebnisse für die anderen Sensitivitätskoeffizienten werden ähnlich bestimmt.  
Eine neue Abkürzung in der Modellgleichung lautet:  $\delta D_{vm}$  und gibt die Meßunsicherheit des Meßgerätes (hier DVM) an. Daraus folgt wieder eine Unsicherheitstabelle.

Größe ( $X_i$ )	Schätzwert ( $x_i$ )	Standardmeßunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitätskoeffizient $c_i$	Unsicherheitsbeitrag $U_{i(y)}$
$A_P$	100,00812 Ohm	$5,7 * 10^{-7} / \sqrt{6} * 100,008$ Ohm	Normal	$c_2 = 1,0$	$2,3 * 10^{-5}$ Ohm
$\delta A_{R0}$	0	$0,00001$ Ohm/ $\sqrt{3}$	Recht.	$c_2 = -1$	$-5,8 * 10^{-6}$ Ohm
$\delta D_{vm}$	0	$17 * 10^{-6} / \sqrt{3} * 100$ Ohm	Recht.	$c_3 = 1$	$9,8 * 10^{-4}$ Ohm
$\delta Auf$	0	$5 * 10^{-8} / \sqrt{3} * 100$ Ohm	Recht.	$c_4 = 1$	$2,9 * 10^{-6}$ Ohm
$\delta Verf$	0	$0,00001$ Ohm/ $\sqrt{3}$	Recht.	$c_5 = 1$	$5,8 * 10^{-6}$ Ohm
<b><math>R_P</math></b>	<b>100,00812 Ohm</b>	-	-	-	<b><math>9,80 * 10^{-4}</math> Ohm</b>

Erweiterte Meßunsicherheit mit  $k=2$ :  $U=2*0,00098$  Ohm= $0,00196$  Ohm

Vollständiges Meßergebnis:  $R_P=(100,000165 \pm 0,00196)$  Ohm

## 2.11 Geschichtliches

ptb +70...Literatur:1/2/3/4/8/9/10/11/12/13/14/15/23/31/32/40/41/70/71/74/75 und Ordner