

2. Widerstand

Ein Normalwiderstand ist ein Gleichstromwiderstand von hoher Genauigkeit, der auf Grund seiner Bauform eine große Langzeitstabilität besitzt und dessen Temperatur und Alterungsverhalten gering und bekannt sein sollte. Er stellt somit das Ohm für Gleichspannung auf Jahre hinaus stabil dar. Dekadische Werte von 0.1 mOhm bis 10 MOhm beziehungsweise von $1 \cdot 10^6$ Ohm bis $1 \cdot 10^{13}$ Ohm sind in Gebrauch. Die niederohmigen Widerstände bis 10 MOhm sind oft drahtgewickelt. Darüber hinaus gibt es Schichtwiderstände im Glasgehäuse.

2.1 Grundformeln

Zur Erinnerung werden die allgemeinen Formeln, die sich in jedem Lehrbuch finden nochmals dargestellt.

$$R = \frac{U}{I} \quad \left[\frac{V}{A} = \Omega \right] \quad (2.1)$$

$$\underline{Z} = R = X_R \quad (2.2)$$

Der Phasenwinkel von Strom und Spannung ist gleich. X_R ist konstant unabhängig von der Frequenz. Die Reihenschaltung entspricht einer Addition der Einzelwiderstände. Für die Energie beziehungsweise Leistung P gilt.

$$P = U * I = I^2 * R = \frac{U^2}{R} \quad (2.3)$$

Für den Widerstandswert eines Drahtes, abhängig von der Länge (l), dem Querschnitt (A) und spezifischen Widerstand (ρ), gilt die Gleichung 2.4. Diese ist bei der Konstruktion von Drahtwiderständen von großer Bedeutung.

$$R = \frac{\rho * l}{A} \quad (2.4)$$

Die allgemeine Temperaturgleichungen für Widerstände, die nun folgt wird später noch genauer betrachtet.

$$R_T = R_{20} * (1 + \alpha_{20} * (T - T_{20})) = R_0 + \Delta R \quad (2.5)$$

$$\Delta R = TK_R * R_0 * \Delta T \quad (2.6)$$

$$TK_R = \frac{1}{R_0} * \frac{\Delta R}{\Delta T} \quad (2.7)$$

Für die Rauschspannung wird hier die Normal- und die Größengleichung angegeben.

$$\overline{U_R} = \sqrt{4 * k * T * \Delta f * R} \quad (2.8)$$

$$\frac{\overline{U_R}}{\mu V} = 0,128 * \sqrt{\frac{R}{k\Omega} * \frac{\Delta f}{kHz}} \quad (2.9)$$

2.2 Material

Um die strengen Bedingungen für einen Normalwiderstand zu erfüllen, werden an den Wickeldraht folgende Bedingungen gestellt; hoher spezifischer Widerstand, kleiner Temperaturkoeffizient (TK), fast keine Alterungserscheinungen und geringe Thermospannungen gegen Kupfer (TV), das häufig für die Anschlußleitungen verwendet wird. Der bekannteste Widerstandsdraht ist Manganin (seit 1889), aber auch andere Materialien, sind durchaus

gebräuchlich. Die Tabelle faßt die Kenngrößen aller möglichen Widerstandsmaterialien zusammen, von denen aber nur die ersten vier für Präzisionswiderstände in Betracht kommen. Die Angaben sind nicht immer gleich $\pm 1\%$, da es sich zum Teil um Firmengeheimnisse handelt.

Stoff	Zusammensetzung(%)	$\rho \left[\frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}} \right]$	$\text{TV}_{\text{Cu}} \left[\frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \right]$	$\text{TK} (a_{20}) \left[\frac{1}{\text{K}} \right]$	Bem.
Manganin	86Cu12Mn2Ni [Isa]	0.43	-0.6	$\pm 1 \cdot 10^{-5}$	bekannt
Evanohm	76Ni20Cr4(Al+Fe)	1.33	+0.5	$\pm 1 \cdot 10^{-5}$	
Isaohm	71Ni21Cr3Cu [Isa]	1.32	+0.5	$\pm 1 \cdot 10^{-5}$	
Zeranin	88Cu6Ge6Mn [Isa]	0.43	-1.3	$\pm 3 \cdot 10^{-6}$	gut;TK kl.
Nickelin	54Cu26Ni20Zn	0.43	-0.5	$+1.1 \cdot 10^{-4}$	
Konstantan	54Cu45Ni1Mn	0.50	-40	$\pm 4 \cdot 10^{-5}$	TU gr.
Kupfer	~100Cu (rein) [Isa]	0.017	~0	$+4 \cdot 10^{-3}$	Kabel
Fe-Cr	76Fe20Cr4Al	1.2	-	$+4 \cdot 10^{-5}$	
Centanin	67Cu27Mn5Ni	1.0	+3	$\pm 2 \cdot 10^{-5}$	
Kohleschicht		65	-	$-5 \cdot 10^{-4}$	einfach
Metallfilm		-	-	$+1 \cdot 10^{-5}$	1%er
Quecksilber	~100Hg	0.958	-	$+8 \cdot 10^{-4}$	giftig
Seewasser		$3 \cdot 10^5$	-	-	salzig

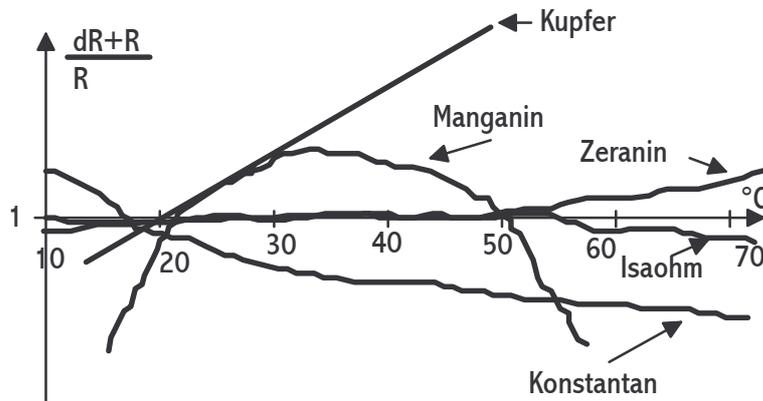


Abb. 1 Temperaturkurven der Stoffe (ohne dR-Maßstab)

Die Kurven geben nur in etwa den Verlauf im normalen Temperaturbereich wieder. Das Manganin, was in der Isabellenhütte (Dillenburg) produziert wird, hat einen parabelförmigen TK-Verlauf, der durch die Gleichung 2.10 beschrieben wird. Die Formel, die auf eine Temperatur von 20°C bezogen ist, gilt für T nur im Bereich von +40°C und +15°C. Durch entsprechendes Legieren, mechanisches und thermisches Behandeln des Drahtes, kann die Parabel in ihrer Form etwas kleiner oder größer ausfallen, was sich durch unterschiedliche Temperaturkoeffizienten a und b ausdrückt. So liegt a zwischen $2 \cdot 10^{-6}/\text{K}$ und $1 \cdot 10^{-5}/\text{K}$ und b beträgt $-5 \cdot 10^{-7}/\text{K}^2$. H&B: $a=2.5 \cdot 10^{-6}/\text{K}$; Maximum-Umkehrpunkt bei 22.5°C mit $dR=3 \cdot 10^{-6}$. Es gibt auch einen Minimum-Umkehrpunkt bei etwa 350°C.

$$R_T = R_{20} * (1 + a_{20} * (T - 20 \text{ } ^\circ\text{C}) + b * (T - 20 \text{ } ^\circ\text{C})^2) \quad (2.10)$$

Die Alterung ist weder in ihrer Richtung noch in der Größe mit kleiner als $1 \cdot 10^{-5}$ pro Jahr im voraus bestimmbar. Isaohm hat, wie auch Kupfer einen linearen Temperaturverlauf. Die leicht S-förmige Kurve von Zeranin ist um 20°C auch linear.

Die Kurven geben nur in etwa den Verlauf im normalen Temperaturbereich wieder.

Das Manganin, was in der Isabellenhütte (Dillenburg) produziert wird, hat einen parabelförmigen TK-Verlauf, der durch die Gleichung 2.10 beschrieben wird. Die Formel, die auf eine Temperatur von 20°C bezogen ist, gilt für T nur im Bereich von +40°C und +15°C. Durch entsprechendes Legieren, mechanisches

2.3 Aufbau

Die Anschlußtechnik ist, insbesondere bei niederohmigen (kleiner 1000 Ohm) Widerständen

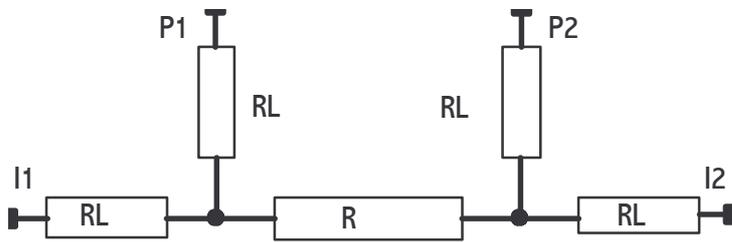


Abb. 2 vierpolige Anschlußweise

üblicherweise vierpolig, da der Nullwiderstand der Anschlüsse und Zuleitungen im Meßaufbau im Milliohmbereich liegen kann.

Durch die Stromklemmen I_1 und I_2 wird niederohmig ein Konstantstrom geschickt und an den Spannungsklemmen P_1 und P_2 wird hochohmig das Potential, das heißt der Spannungsabfall am Widerstand (R) selbst, gemessen. So üben die Leitungswiderstände R_L keinen Einfluß auf das Meßergebnis aus. Die großen Normalwiderstände bestehen aus Manganindraht mit Seide umspinnen oder lackiert. Vor dem Einbau wird eine künstliche Alterung des nackten Drahtes bei 140°C über 24 Stunden durchgeführt. Die niederohmigen Widerstände sind aus Manganinblechen aufgebaut. Der Draht wird locker auf einen Porzellan-(Keramik-)Spulenkörper gewickelt. Die elektrische Verbindung geschieht durch eine Hart-Lötung bei 700°C mit Silberlot an den Kupferanschlußklemmen, was eine große Erfahrung voraussetzt. Der Widerstand kann offen gebaut sein, sodaß die Wicklungen direkt mit der Umgebung in Verbindung stehen, oder der Wickelzylinder befindet sich in einem mit Spezialöl gefüllten Behältnis.

Die großen Normalwiderstände bestehen aus Manganindraht mit Seide umspinnen oder lackiert. Vor dem Einbau wird eine künstliche Alterung des nackten Drahtes bei 140°C über 24 Stunden durchgeführt. Die niederohmigen Widerstände sind aus Manganinblechen aufgebaut. Der Draht wird locker auf einen Porzellan-(Keramik-)Spulenkörper gewickelt. Die elektrische Verbindung geschieht durch eine Hart-Lötung bei 700°C mit Silberlot an den Kupferanschlußklemmen, was eine große Erfahrung voraussetzt. Der Widerstand kann offen gebaut sein, sodaß die Wicklungen direkt mit der Umgebung in Verbindung stehen, oder der Wickelzylinder befindet sich in einem mit Spezialöl gefüllten Behältnis.

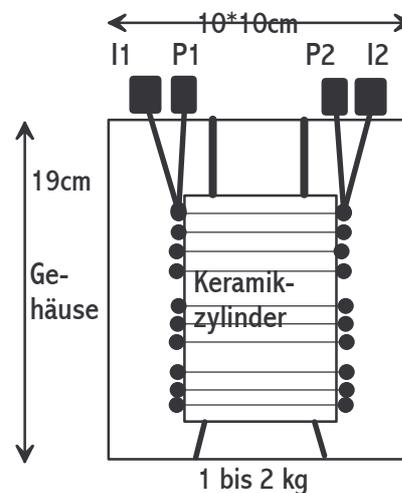


Abb. 3 Normalwiderstand in offener Bauweise

Eine dauernde Umspülung der Wicklungen kann auf lange Sicht die Isolierung beschädigen und Korrosion durch freigesetzte Säure verursachen. Um das stark induktive Verhalten eines niederohmigen Wickelwiderstandes (<100 Ohm) zu verringern, wird dieser bifilar gewickelt. Dabei heben sich die magnetischen Felder zum Teil auf. Es wird die Induktivität kleiner aber die Kapazität ist groß. Um auch diese zu verringern, besonders bei Widerständen größer als 100 Ohm, wendet man die Caperonwicklung an. Die Gesamtwicklung wird in Gruppen (Kammern) aufgeteilt und jede Gruppe hat zwei gegenläufige Lagen. Hierdurch wird die Induktivität stark und die Kapazität schwächer herabgesetzt. Um induktiven und kapazitiven Anteil in hochohmigeren Widerständen stark zu verringern, wendet man die Wagnerwicklung, eine Mehrfachreihenschaltung der Caperonwicklung an. Durch diese Maßnahmen wird auch die Zeitkonstante der Widerstände stark verkleinert. So sind die Gleichstromnormalwiderstände auch für niederfrequente Wechselströme, bei abhängig mit Frequenz ansteigender Ungenauigkeit, zu benutzen. Diese Zeitabhängigkeit ist auch bei der Messung mit Präzisionsvoltmetern zu beachten. Diese schalten nämlich die Messspannung zur Termospannungskorrektur um (+/-) oder aus. Die Umschaltzeit kann variiert werden und muß an die Zeitkonstante des Widerstands angepasst werden; sonst kommt es zu Fehlmessungen. Für die offenen Widerstände empfiehlt sich im Temperaturbad das Shellöl S4919 oder besser das ESSO Marcol 82.

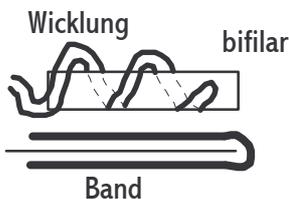


Abb. 4 Wicklungsaufbau

Um das stark induktive Verhalten eines niederohmigen Wickelwiderstandes (<100 Ohm) zu verringern, wird dieser bifilar gewickelt. Dabei heben sich die magnetischen Felder zum Teil auf. Es wird die Induktivität kleiner aber die Kapazität ist groß. Um auch diese zu verringern, besonders bei Widerständen größer als 100 Ohm, wendet man die Caperonwicklung an. Die Gesamtwicklung wird in Gruppen (Kammern) aufgeteilt und jede Gruppe hat zwei gegenläufige Lagen. Hierdurch wird die Induktivität stark und die Kapazität schwächer herabgesetzt. Um induktiven und kapazitiven Anteil in hochohmigeren Widerständen stark zu verringern, wendet man die Wagnerwicklung, eine Mehrfachreihenschaltung der Caperonwicklung an. Durch diese Maßnahmen wird auch die Zeitkonstante der Widerstände stark verkleinert. So sind die Gleichstromnormalwiderstände auch für niederfrequente Wechselströme, bei abhängig mit Frequenz ansteigender Ungenauigkeit, zu benutzen. Diese Zeitabhängigkeit ist auch bei der Messung mit Präzisionsvoltmetern zu beachten. Diese schalten nämlich die Messspannung zur Termospannungskorrektur um (+/-) oder aus. Die Umschaltzeit kann variiert werden und muß an die Zeitkonstante des Widerstands angepasst werden; sonst kommt es zu Fehlmessungen. Für die offenen Widerstände empfiehlt sich im Temperaturbad das Shellöl S4919 oder besser das ESSO Marcol 82.

Es gibt außer dem typischen offenen Präzisionswiderstand (siehe Foto S. 2-4) von AEG/H&B im Bereich 0.1mOhm bis 100kOhm, wie oben beschrieben, noch speziellere Bauformen, die sich im Laufe der Zeit als besonders gut herausgestellt haben. So ist der Thomas-Ein-Ohm-Widerstand (1931/NBS) wie der Name schon sagt nur für den Nennwert von 1 Ohm gebaut worden. Auch er benutzt als Widerstandsdraht das Manganin, ist aber doppelwandig, sodaß die Wicklungen nicht mit dem Öl in Berührung kommen, wenn dieser in einem Temperaturbad betrieben wird. Zum Schutz vor Umwelteinflüssen ist der Zwischenraum, in dem sich die isolierten Wicklungen auf einem Bronzeyylinder befinden, mit Stickstoff gefüllt. Auch wenn der Thermokontakt zwischen dem Öl und den Wicklungen nicht so gut wie bei dem offenen Typ ist, so ist er bis heute als Primärstandart in vielen Instituten wegen der äußerst geringe Driftrate von kleiner als 0.1ppm pro Jahr sehr beliebt. Von 1mOhm bis 0.1 Ohm kommt eine offene Bauweise zur Anwendung die zum Teil als Reichsanstalt Typ bezeichnet wird, da er von dem Vorläufer der PTB (Otto Wolf) konstruiert wurde. In USA kommt für Widerstände größer als 1 Ohm der Rosa- oder NBS-Typ, der sich in einer geschlossenen mit Öl gefüllten Kapseln befindet, zum Einsatz. Von ESI wird der Typ SR104 mit einem Nennwert von 10 kOhm gebaut. Für viele Messungen und Kalibrierungen ist dieser Nennwert von großer Wichtigkeit. Es handelt sich um eine Gruppe von Evanohm-Widerständen, die auf niedrigen Temperaturkoeffizienten selektiert und vorgealtert sind. Sie befindet sich in einem mit Silikonöl gefüllten geschlossenen und thermisch isoliertem Gehäuse. Die Stabilität beträgt 1ppm pro Jahr und der Temperaturkoeffizient $\pm 0.2\text{ppm}$ pro $^{\circ}\text{C}$. Die Innentemperatur kann mit einem eingebauten Temperatursensor überwacht werden. Eine neue Widerstandsreihe wird von der



Abb. 5 Hartmann und Braun 1 Ohm Widerstand

Firma Fluke, Typ 742 (0,3W) zwischen 1 Ohm und 10MOhm, gefertigt. Jeder Nennwert besteht aus einer Gruppe ausgemessener Einzelwiderstände, aus Wickeldraht (NiCrCoAl), in Parallelschaltung, die sich in einem geschlossenen Gehäuse befinden und kein Ölbad zum Betrieb benötigen. Durch die Gruppenbildung kann sowohl der Nennwert sehr genau erreicht, als auch der Temperaturkoeffizient niedrig gehalten werden. Der Hauptnachteil bei den neueren kleinen Normalwiderständen ist im Gegensatz zu den älteren großen Bauformen deren geringe zulässige Belastung. Es besteht die Möglichkeit bei 1M und 10 MOhm Widerständen eine Reihenschaltung von 10 kleineren Nennwerten, da diese leichter herzustellen und zu selektieren sind, vorzunehmen. Bei Normalen ab 10^8 Ohm werden bis 10^{11} Ohm Metalloxid- und bis 10^{14} Ohm in Schutzgas eingeschmolzene Kohleschichtwiderstände verwendet. Hier liegen die jährlichen Widerstandsänderungen zwischen 0.1% und 1%. Der Temperaturkoeffizient ist mit etwa $3 \cdot 10^{-4}$ pro Kelvin auch nicht besonders gut. Auf die starke Spannungsabhängigkeit wird im nächsten Kapitel eingegangen. Widerstandsdekaden sind aus mehreren Einzelwiderständen aufgebaut, die meistens über Drehschaltern in Reihe verbunden werden können. Allein schon wegen der Schaltmechanik und keiner Möglichkeit sie in Öl zu betreiben, werden sie nicht als Präzisionsnormale eingesetzt. Die Genauigkeit reicht von 1% bis 0.01% und nur zum Teil mit Relais in Kalibratoren bis zu ca. 20ppm.

2.4 Effekte

Die Frequenzabhängigkeit tritt nicht nur bei niederfrequentem Wechselstrom, sondern auch beim Umschalten von Gleichstrom (Zeitkonstante), oft angewendet bei Widerstandsmeßgeräten um Thermospannungen zu kompensieren, auf. Die Zeitkonstante ist die Relaxationszeit für Ladungsabbauvorgänge nach einer e-Funktion. Sie wird bestimmt durch die Kapazität und den Widerstand der daran beteiligt ist.

$$\tau = \frac{\varepsilon * \varepsilon_0}{\sigma} \quad (2.11)$$

$$R = \frac{d}{\sigma * A} \quad C = \varepsilon * \varepsilon_0 * \frac{d}{A} \quad (2.12)$$

Aus der Gleichung 2.11 und den Gleichungen 2.12 ergibt sich 2.13.

$$\tau = R * C \quad (2.13)$$

Für Kupfer beträgt die Zeitkonstante nur $1.5 * 10^{-15}$ s und für Glas zwischen 5 und 5000s. Bedingt durch den Widerstandsaufbau liegen die Zeitkonstanten der AEG-Normalwiderstände je nach Wert bei $0,1 \mu\text{s}$ (1kOhm) bis $10 \mu\text{s}$ (0.01Ohm). Der Widerstandswert kann bei diesen Bauformen bei 500 Hz Wechselstrom schon um $1 * 10^{-5}$ vom Gleichstromwert abweichen. Die Luftfeuchtigkeit ruft eine mechanische Änderung des Isoliermaterials Seide hervor und damit eine Drahtverformung, die wiederum eine Widerstandsänderung zur Folge hat. Diesen Feuchtigkeitseffekt kann man ausschließen, indem man den Widerstand luftdicht abkapselt oder in Öl taucht. Bei hochohmigen Widerständen (Kohleschicht) größer als 1 GOhm wird mit steigender Meßspannung, zum Teil schon ab 20 Volt, der Widerstand geringer. Dieser Effekt ist zwar in den meisten Fällen bis zu einer Maximalspannung reversibel, jedoch kann sich der alte Wert erst nach Tagen einstellen. Bei 100V beträgt für die folgenden Nennwerte (Ohm) der Spannungsabfall typisch: $1 * 10^9 / -0.5\%$; $1 * 10^{10} / -1.2\%$; $1 * 10^{11} / -2.5\%$. Zudem liegt die Messdauer bei hochohmigen Widerständen im zweistelligen Minutenbereich, nachdem alle äußeren Einflüsse zum Beispiel durch Kabelbewegung ausgeschlossen wurden.

Das Temperaturverhalten äußert sich nicht nur im Temperaturkoeffizient des Wickeldrahtes, sondern in noch drei weiteren Effekten. Durch die Maximalleistung des Widerstands ergibt sich die höchste Meßspannung.

$$U = \sqrt{P * R} \quad (2.14)$$

Der Seebeckeffekt tritt auf in einem Leiterkreis mit verschiedenen Metallen, deren Kontaktstellen unterschiedliche Temperaturen aufweisen. Wie bei einer Diode treten abhängig von der Kontakttemperatur Elektronen (Austrittsarbeit) in das andere Metall über. So ist bei unterschiedlichen Kontakttemperaturen im Stromkreis eine Thermospannung meßbar. Dieser Effekt wird bei Thermoelementen zur Temperaturmessung verwendet. Die Umkehrung des Seebeckeffekts ist der Peltiereffekt. Hier entsteht keine Spannung durch Temperaturdifferenz, sondern es wird durch eine Spannungsquelle eine Temperaturdifferenz zwischen den Kontaktstellen hervorgerufen. Bei gleicher Stromrichtung und bei den Effekten, wird jetzt die Stelle kühler, die beim Seebeckeffekt die wärmere war. (Umkehrung). Der Peltiereffekt wirkt also hemmend auf den Seebeckeffekt. Der Thomsonoeffekt sagt aus, daß in einem Leiter mit Temperaturgefälle ein Spannungsabfall durch einen Thermostrom entsteht. Um all diese Einflüsse die sich in Thermospannungen äußern sehr klein zu halten, wird bei der Messung die Polarität des Meßstromes alle paar Sekunden umgepolt um diese so herauszumitteln (Solatron 7081, FL8508/88), oder in einer kurzen stromlosen Phase wird die Thermospannung gemessen und von der Meßspannung abgezogen (HP3456/3458A). Zusätzlich sollte man

wenn möglich reine Kupferverbindungen (Buchsen-Stecker-Kabel) untereinander herstellen. So erzeugt eine Thermospannung von $5\mu\text{V}$ bei einem Widerstand von $1\text{m}\Omega$ und einem Meßstrom von 50A einen Fehler von 0.01% . Gerade bei diese hohen Meßströmen ist auf entsprechend dicke Kabel und eine Ölumspülung des Anschlusses zu achten. Da die Temperatur eine entscheidene Rolle bei den Präzisionsmessungen spielt, bieten Hersteller wie Guildline spezielle Ölbäder an. Diese haben eine Stabilität der Temperatur von $0,002^\circ\text{C}$. In ihnen wird mit einer Pumpe für eine gleichmäßige Umspülung des Widerstands gesorgt. Im Meßkreis muß ein Temperaturgleichgewicht bestehen, das heißt der Prüfling darf nicht stark belastet werden und sollte gekühlt sein (23°C) und die Anschlußklemmen und Stecker dürfen mit der Hand beim Anschluß nicht unnötig erwärmt werden. Es hat sich als günstig erwiesen vor der eigentlichen Messung eine Wartepause von ein paar Minuten einzulegen. Resteffekte

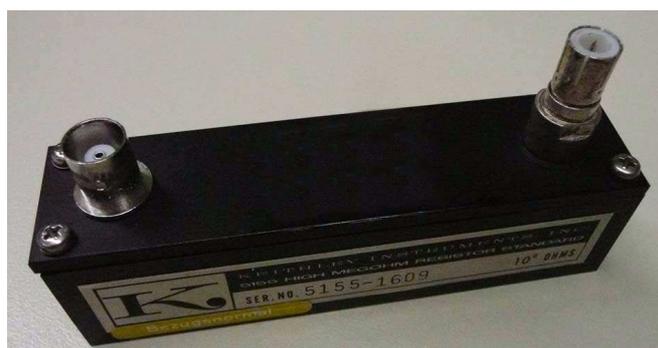


Abb.6 Hochohmwiderstand 2-polig mit Schirm (5155)

sind elektrochemische Vorgänge, die Spannungen erzeugen können. Auch Leckströme parallel zu den hochohmigen Widerständen und deren Zuleitungen verkleinern dessen Wert. Gerade bei hochohmigen Widerständen ab $1\text{M}\Omega$ empfiehlt sich eine Abschirmung der Zuleitungen und des Widerstandes, am besten mit Guardschirm (dreipolig) oder ersatzweise über die Masse. Ohne Abschirmung sollten sich die Anschlußkabel nicht berühren und eine Bewegung um den Meßplatz vermieden werden. Auch die Bewegung des Ölbades durch Ladungen, wirkt sich auf die Messung kapazitiv aus, was in einer höheren Standardabweichung (unstabiler) zu beobachten ist. Daher empfiehlt es sich bei Widerständen größer $10\text{k}\Omega$ für die Messung selbst die Strömung im Bad kurz auszuschalten. Widerstände mit mehr als $1\text{M}\Omega$ sind, wegen des Parallelwiderstandes durch das Öl und dem gerade beschriebenen Effekt, nur an Luft zu messen.

Bezeichnung	Klasse[%]	Anschluß	Aufbau	Leistung	TK[1/K]	Material
H&B / AEG	0.002	4polig	offen; gr.	1W	<2ppm	Manganin
Thom.Le&No-4210	0.002	4polig	zu; gr.	0.1W	<2ppm	Manganin
Guildline 9330	0.001	4polig	zu; kl.	0.1W	<2ppm	?
Guildline 9334	0.005	4polig	zu; mitt.	0.1W	~1ppm	?
Genrad 1440	0.01	4polig	zu; kl.	1W	~20ppm	Evanohm
ESI SR104	0.006	4polig	zu; kl.	1W	~5ppm	Evanohm
Fluke 742A	0.001	4polig	zu; mitt.	0.3W	<1ppm	Evanohm
Yokogawa	0.002	4polig	zu; gr.	1W	~4ppm	?
Croydon PI	0.01	4polig	offen; gr	1W	~3ppm	Manganin
IET SRL	0.002	4polig	zu; mitt.	0.1W	~3ppm	Evanohm?
IET SRR	0.003	4polig	offen; gr.	1W	~2ppm	Manganin
Keithley 5155	0.1	3polig	zu; kl.	0.1W	gr.	Kohle?

2.5 Hallwiderstand

Die Einheit des Widerstandes wurde bisher in aufwendiger Weise von einem berechenbaren Kondensator abgeleitet. Mit der Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts durch Klaus von

Klitzing, für die er 1985 den Nobelpreis (Physik) erhielt, kann heute das absolute Ohm mit einer Unsicherheit von 0.2ppm anders dargestellt werden. Für den quantisierten Hallwiderstand gilt allgemein die Gleichung 2.15 mit der Plank-Konstante h , der Elementarladung e und der Stufenzahl i .

$$R_{Hi} = \frac{1}{i} * \frac{h}{e^2} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.15)$$

Für R_{Hi} mit $i=1$ hat man sich 1990 international auf den Wert von $R_K = 25,812807572 \text{ k}\Omega$ (Klitzingkonstante) mit einer Unsicherheit von $4 \cdot 10^{-9}$ geeinigt.

Der Halleffekt ist schon seit 1879 bekannt und sagt aus, daß bei einem dünnen Metallband, das von einem Gleichstrom I durchflossen wird und sich senkrecht in einem Magnetfeld befindet, an den Querseiten eine Spannung ($U_H = R_H * I$) auftritt. Dies kommt daher, weil auf in einem Magnetfeld bewegende Elektronen die Lorentz-Kraft ausgeübt wird, die in Querrichtung zur Stromflußrichtung wirkt. Hier ist der klassische Hallwiderstand von der Elementarladung, der Elektronendichte n und dem Magnetfeld B abhängig und tritt nicht in festen Stufen auf.

$$R_H = \frac{1}{n * e} * B \quad (2.16)$$

Bei der Untersuchung dieser Hallspannung von Silizium-MOSFETs bei der Temperatur von 1K (-272°C) mit flüssigem Helium und einem starken Magnetfeld von 20 Tesla wurde bei dem hyperbolischen Verlauf der Hallspannung eine stufenförmige Überlagerung festgestellt. Dieser quantisierte Verlauf läßt sich durch das Verhalten der Elektronen in ihren erzwungenen Kreisbahnen erklären. Aus den durchgeführten Messungen und Berechnungen läßt sich dann die Gleichung 2.15 ableiten.

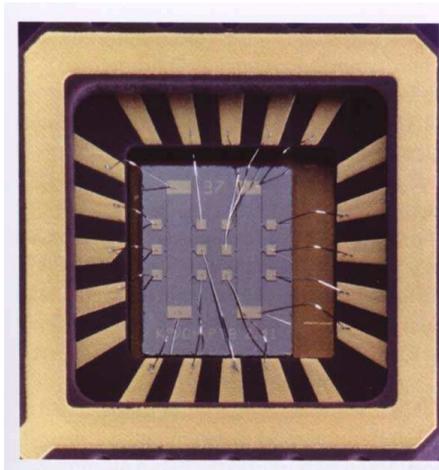


Abb.7 Quantenhallwiderstand -PTB

In der Praxis nimmt man eine Reihenschaltung von einem Normalwiderstand und einem Hallwiderstand, die von dem Strom I ($\sim 30 \mu\text{A}$) durchflossen wird. Beide Spannungsabfälle werden bestimmt und über das Verhältnis beider, der Normalwiderstand berechnet. Bei dieser klassischen Substitutionsmessung wird aus praktischen Gründen, Ausbildung der Stufe und Widerstandswert, die Stufenzahl i 2 oder 4 gewählt. Dann ist ein Widerstandswert von 12,9064035 k Ω oder 6,45320175 k Ω zu erwarten. Die Unsicherheit der Messung selbst, ohne Normale, liegt bei $1 \cdot 10^{-8}$. Ein Nachteil bei dem Hallwiderstand ist, daß dieser keinen dekadischen Wert besitzt und daher keine eins zu eins Messung zu den üblichen Normalen möglich ist. Eine direkte Anbindung an 10k Ω wird nicht angestrebt, da die unerwünschte Rauschspannung proportional zum Widerstand und zur Temperatur ist. Mit einem Kryo-Stromkomparator und einem gekühlten 100 Ω Hilfswiderstand wird die Anbindung an 1 Ω ermöglicht. Dies erhöht zwar die Substitutionsunsicherheit, aber im Laboraufbau der PTB ist trotzdem der Widerstand von 1 Ω auf $1 \cdot 10^{-9}$ genau zu bestimmen.

2.6 Widerstandsschaltungen

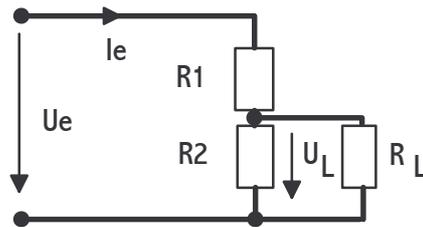
Es gibt verschiedene Möglichkeiten Widerstände zu verschalten, um bestimmte Meßprobleme optimal zu lösen. Die einfachste und bekannteste Schaltung, außer der einfachen Reihen- und Parallelschaltung, ist die des Spannungsteilers.

$$R_E = \frac{U_E}{I_E} = R_1 + \frac{R_2 * R_L}{R_2 + R_L} \quad (2.17)$$

Über das Spannungs zu Widerstandsverhältnis gilt.

$$U_L = \frac{R_2 * R_L}{R_2 * R_L + R_1 * R_2 + R_1 * R_L} * U_E \quad (2.18)$$

Die Gleichung 2.18, die ja mit der Last gilt, kann mit der Bedingungen $R_L \gg R_2$, das heißt der Lastwiderstand ist sehr hochohmig gegenüber R_2 vernachlässigt werden ($R_1 * R_2 \ll$ klein).



$$U_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 * R_2}{R_L}} \quad (2.19)$$

$$U_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} * U_E \quad (2.20)$$

Beispiel: $U_E = 100V$; $R_1 = 1000\Omega$; $R_2 = 100\Omega$; $R_L = 10k\Omega, 1M\Omega, 00\Omega$. Das ergibt mit Gl.2.18 bzw. 2.20: $U_L = 9.009009V, 9.09008V, 9.090909V$.

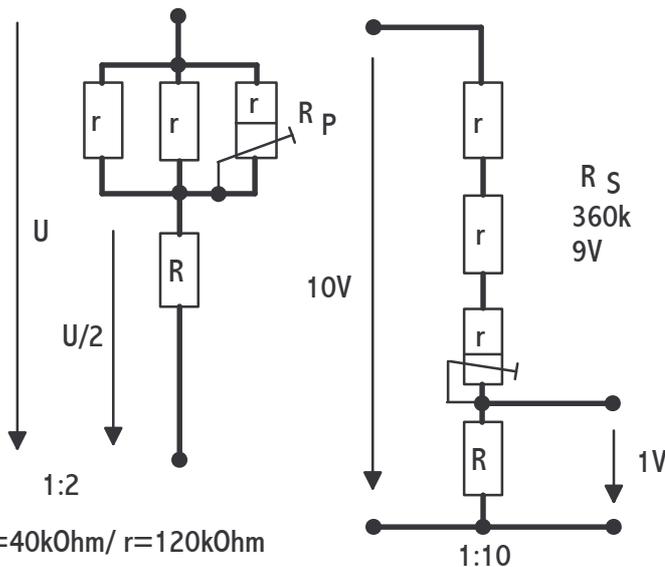
Der Effekt des Spannungsteilers muß bei allen Messungen, bei dem die Last (R_L) dem Eingangswiderstand eines Multimeters entspricht, beachtet und gegebenenfalls korrigiert werden.

Nach diesem Prinzip kann man auch die Abgriffsspannung einer Teilerkette berechnen. Zu beachten ist, daß die Quelle (U_E) die Last R_E sieht und soll daher üblicherweise im Sense-Mode betrieben werden. Eine weiter Schaltung verfolgt das Hammon-Prinzip (1954). Um

bestimmte genaue Widerstandsteiler zu bauen, braucht man nur zehn abgleichbare Widerstände, die man auf einer Brücke sehr genau mißt. So kann man durch Reihen- und Parallelschaltung Werte von 1:10/:100 erreichen.

Beispiel: $R=10 \Rightarrow 10*10$ in Reihe = 100 oder $10*10$ Parallel = 1

Der Abgleichfehler der Einzelwiderstände geht im Widerstandsverhältnis nur als Fehler zweiter Ordnung ein. So ist ein Widerstandsverhältnis von 1:100 mit $1*10^{-8}$ erreichbar. Es können auch Fehler durch Übergangswiderstände und ungleichmäßige



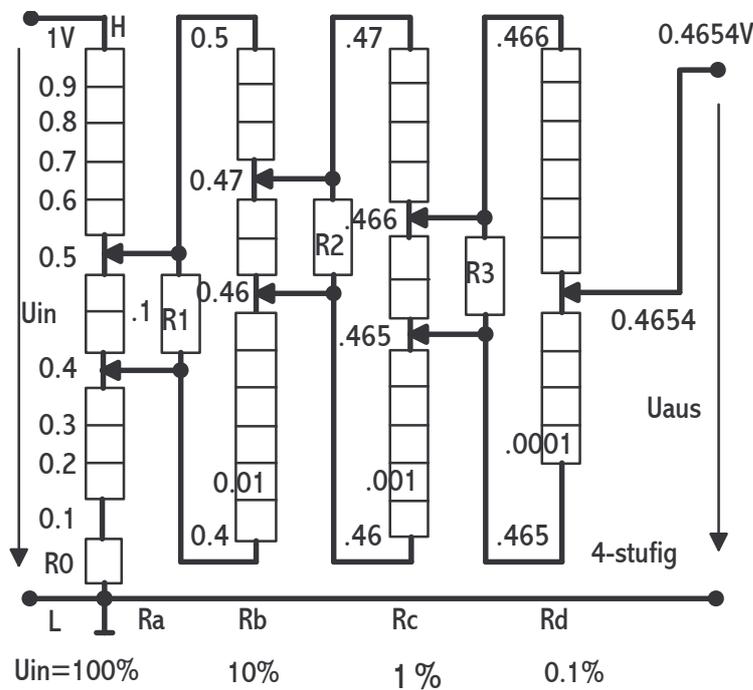
Stromverteilung auftreten. Mit einem ähnlichen Trick kann man auch einen 1:10 Teiler bauen. $3*120 k\Omega$ parallel und $1*40K\Omega$ in Reihe und 1:2 abgleichen. Dann ergibt sich durch Umschalten von $3*120k\Omega$ in Reihe und $1*40k\Omega$ in Reihe ein 1:10 Teiler. Das 1:2 Teilerverhältnis ist normalerweise an einer Brücke einfacher und genauer auszumessen und wird zum Teil auch für automatisch Korrekturen verwendet, da die beiden 40 kOhm Widerstandswerte an einem hochauflösenden Meßgerät verglichen werden können.

$$\frac{R_S}{R_P} = \frac{3 * R(1+d_V)}{\frac{R}{3} * (1+d_V)} = 9 \quad (2.21)$$

mit $d_v = 1/3 * (d_{R1} + d_{R2} + d_{R3})$ (Abweichungen) und $R = R + d_R * R$. Die Gleichung 2.21 gilt nur, wenn $d_R^2 \ll d_R$ zum Beispiel $d = 1 * 10^{-5} \Rightarrow d^2 = 1 * 10^{-10}$. Der untere Teil von 2.21 ist eine abgebrochene Reihenentwicklung für die Parallelschaltung.

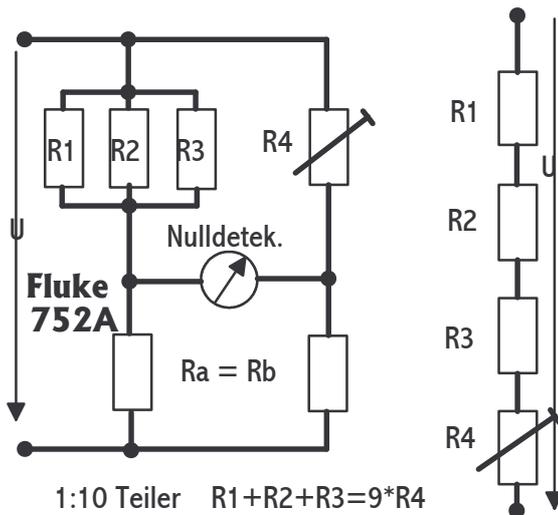
Beispiel: $R = 120.01 (1 * 10^{-4})$ mit GL.2.21 $R_s/R_p = 9.0000075 (\sim 1 * 10^{-6})$. Fluke 752A 10/100:1 mit $\pm 0.3 \text{ppm}$.

Der Kelvin-Varley-Teiler ist ein Verhältnisteiler mit einem Auflösungsvermögen von 0.1ppm. Der Eingangswiderstand ist in jeder Teilerstellung konstant und die maximale Eingangsspannung beträgt 1000 V (Fluke 720A). Jede der sechs oder sieben Teilerstufen besteht aus elf, die letzte aus zehn Einzelwiderständen, deren Werte nicht absolut, aber untereinander gleich sein müssen. Zudem muß der Gesamtwiderstand einer Dekade, einschließlich des Nebenwiderstandes, zwei mal so groß sein, wie der Stufenwiderstand der vorhergehenden Dekade. Zwischen den beiden Dekaden herrscht so Anpassung. Der Ausgangswiderstand ist unbestimmt. $R_{IN} = 10 * R_{AUS}$ Hier mit $R_A = R_B = R_C = R_D = 10 \text{kOhm} \Rightarrow R_{IN} = 100 \text{kOhm}$; $R_1 = R_2 = R_3 = 25 \text{kOhm}$. Pro Dekade wird immer ein Zehntel der vorherigen Dekade abgegriffen um so den Ausgangsspannungswert einzustellen.



Es ist immer die erste Widerstandskette auf jeden Fall mit zu benutzen! An R1 bis R3 fällt je ein Zehntel des Dekadenwertes ab, da zwei mal der Dekadenwiderstand parallel zum Eingangswiderstand der nächst niedrigeren Dekade, der zwei Dekadenwiderständen in der Größe entspricht, insgesamt einen Widerstand von der Größe eines Dekadenwiderstandes ergibt; hier sind dies 10kOhm. Da an der ersten Dekade 100% der Eingangsspannung abfällt, muß diese am genauesten sein. Aus diesem Grund sind in Präzisionsteilern die ersten Stufen oft justierbar. Der Widerstand R_1 ff. dient dazu

die Bedingung, daß der Stufenwiderstand gleich dem Eingangswiderstand der nächsten Dekade sein muß, zu erfüllen. Sonst wären die Reihe in ihren Werten so: 10k, 2k, 400, 80 Ohm



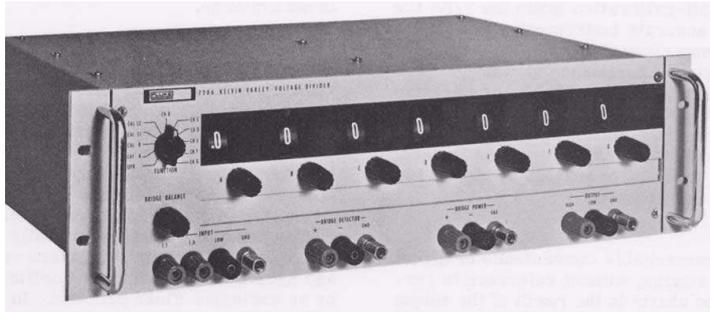
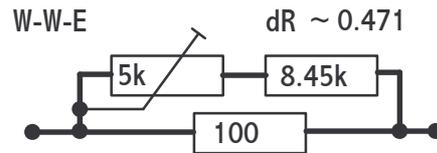


Abb.8 Fluke 720 Kelvin-Varley-Teiler

diesen mit einer Meßbrücke abgleichen, ebenso die Parallelwiderstände. Die Linearität des Kelvin-Varley-Teilers beträgt etwa 0.1ppm und die Stabilität 1ppm pro Jahr. Beim 720A von Fluke ist über eine eingebaute Brücke, mit einem Nullindikator, eine Eigenkalibrierung möglich.

usw (1/5). Die Widerstände würden somit viel zu niederohmig. Üblich sind 3*10kOhm und 4*1kOhm. Um die Einzelwiderstände der ersten drei Stufen und die Parallelwiderstände abzugleichen, setzt man dort Waidner-Wolf-Elemente ein. R₀ kann man als Bezugswiderstand ansehen und die anderen auf

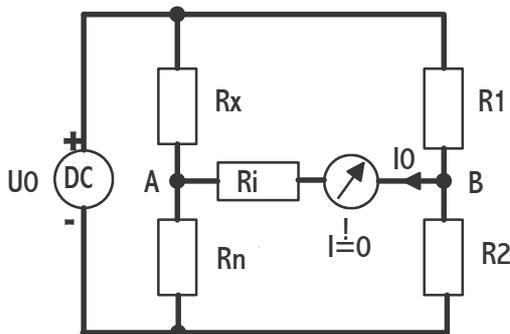
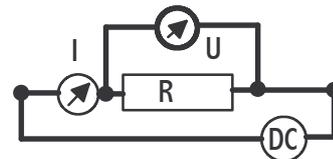


2.7 Meßtechnik

Um einen Gleichstromwiderstand zu bestimmen, gibt es viele Methoden und Schaltungen. Nur die bekanntesten werden hier behandelt. Die einfachste Art ist die Ohmmetermethode.

$$R = \frac{U}{I} \quad (2.22)$$

Die Abbildung zeigt die spannungsrichtige Messung, da der Strommesser auch den Spannungsmesserstrom mit bestimmt. Der Innenwiderstand des Spannungsmessers muß daher sehr groß gegenüber dem Prüfling sein. Entweder legt man eine bekannte Spannung an den Widerstand und mißt den Strom, wie dies in den einfachen Widerstandsmessern mit unlinearer Skala geschieht, oder man speist den Widerstand durch eine Konstantstromquelle und mißt den Spannungsabfall hochohmig. Bei fast allen modernen digitalen Multimetern ist dies im Ohmbereich der Fall. Es ist auch eine diskrete Strom-Spannungsmessung möglich, wenn die Quellenspannung (-strom) unbekannt ist. Hierbei ist der Einfluß der Meßinnenwiderstände zu beachten. Der Spannungsmesser muß sehr hochohmig und der Strommesser sehr niederohmig sein, um das Ergebnis nicht zu sehr zu verfälschen. Außerdem sollte die Quelle während der Meßzeit stabil sein. Moderne Multimeter haben eine hochgenaue aktive Stromquelle zur Speisung und messen dann den Spannungsabfall am Prüfling.



Bei fast allen modernen digitalen Multimetern ist dies im Ohmbereich der Fall. Es ist auch eine diskrete Strom-Spannungsmessung möglich, wenn die Quellenspannung (-strom) unbekannt ist. Hierbei ist der Einfluß der Meßinnenwiderstände zu beachten. Der Spannungsmesser muß sehr hochohmig und der Strommesser sehr niederohmig sein, um das Ergebnis nicht zu sehr zu verfälschen. Außerdem sollte die Quelle während der Meßzeit stabil sein. Moderne Multimeter haben eine hochgenaue aktive Stromquelle zur Speisung und messen dann den Spannungsabfall am Prüfling.

Eine große Bedeutung in der Präzisionsmeßtechnik hat die Brückenmethode. Es gibt vielerlei Schaltungen, wobei hier nur die drei bekanntesten behandelt werden. Bei allen Brücken wird ein Vergleich zwischen einem bekannten Normalwiderstand und einem Teilverhältnis mit dem Prüfling durchgeführt. Der Nullabgleich wird mit einem Anzeigeelement kontrolliert. Die Mutter aller

Brückenschaltungen ist die Wheatstone Brücke. Sie besteht aus zwei parallelen Widerstandsteilern, gespeist von einer Gleichspannungsquelle deren Wert nicht genau bekannt, aber konstant sein muß und einem Nullindikator. Die folgenden Gleichungen aus den allgemeinen Maschen- und Knotenbedingungen zeigen die Ableitung und die Funktionsweise der Brückenschaltung.

$$U_{AB} = U_{R1} - U_{R2} = \frac{R_1}{R_1+R_2} * U_0 - \frac{R_X}{R_X+R_N} * U_0 = \frac{R_1 * R_X + R_1 * R_N - R_1 * R_X - R_2 * R_X}{(R_1+R_2) * (R_X+R_N)} * U_0 \Rightarrow$$

$$U_{AB} = \frac{R_1 * R_N - R_2 * R_X}{(R_1+R_2) * (R_X+R_N)} * U_0 \quad (2.23)$$

Für den Abgleich gilt: $I_0=0 \Rightarrow U_{AB}=0 \Rightarrow$ mit Gl. 2.23 $R_1 * R_N - R_2 * R_X = 0$ nach R_X aufgelöst:

$$R_X = R_N * \frac{R_1}{R_2} \quad I_0=0 \quad (2.24)$$

Bei der Speisung der Brücke aus einer Spannungsquelle ist das Verhalten der Brücke nur im Abgleich linear. Anders ist dies bei Konstantstromspeisung, hier gilt dann $I_0 \sim dR$. Für die Spannungsspeisung gilt, zur Berechnung der Brücken(un)empfindlichkeit in Gleichung 2.25.

$$I_0 = U_0 * \frac{R_X * R_2 - R_1 * R_N}{(R_1+R_2) * (R_X * R_N + R_1 * (R_X+R_N)) + R_1 * R_2 * (R_X+R_N)}$$

$$R_1 = \frac{R_X * R_2}{R_N} * (1 - \delta)$$

Alle fünf Widerstände werden als gleich (R) angesetzt und mit $I_0=I_g$ ist der Grenzstrom, das ist der kleinste Anzeigestrom für den Nullindikator, gemeint (δ =detektierbare Stromänderung).



Abb.9 Einfache Widerstandsmessbrücke

$$\delta = 8 * R * \frac{I_g}{U_0} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{8R\Delta I}{U_0} \quad (2.25)$$

Wie man sieht wächst mit der Stromstärke die Empfindlichkeit der Brücke, aber leider erhöht sich die Stromerwärmung gleichzeitig mit dem Quadrat der Stromstärke. Deswegen ist eine Erhöhung der Empfindlichkeit nach oben begrenzt. Die untere Grenze des Meßbereichs von $R_X=10$ Ohm ist durch die Leitungs- und Schalterwiderstände in der Brücke gegeben ($0.1\text{Ohm} \Rightarrow >0.1\%$). Die obere Grenze von $R_X=100\text{kOhm}$ wird durch die Leckwiderstände und die maximale Speisespannung und damit der Obergrenze für die Leistungs- und Spannungsbelastbarkeit für die Widerstände vorgegeben. Außerdem wird die Brücke im normalen Betrieb dann zu unempfindlich ($10\text{MOhm} \Rightarrow >0.1\%$). Die Teilerwiderstände liegen üblicherweise bei 10 Ohm bis 1kOhm. Die Genauigkeit beträgt, bei einer Auflösung von 1ppm, 0.01%. Sehr gut sind die Brücken auch für Substitutionsmessungen zu gebrauchen. In diesem Fall interessiert die Auflösung, Stabilität und Reproduzierbarkeit und nicht die absolute

Genauigkeit. Zudem muß die Empfindlichkeit und Auflösung des Nullinstrumentes hoch genug sein. Die Ausführungsformen sind Schleifdraht- und Drehschaltermeßbrücken oder auch Stöpselversionen. Die Schleifdrahtbrücken sind nicht ganz so genau, da sich ein Potentiometer nie so linear einstellbar ist. Auf Grund der kleineren Abmessungen findet sich diese Konstruktion fast immer in Handinstrumenten. Ein typisches Instrument in der

Präzisionsmeßtechnik für den Nullabgleich ist das Galvanometer. Diese Instrument hat einen Innenwiderstand von etwa 100 Ohm und eine hohe Stromempfindlichkeit im pA Bereich. Da das Nullinstrument ja die Spannungsdifferenz zwischen dem linken und dem rechten Zweig anzeigt, kann man für den rechten Zweig mit R1 und R2 auch zwei verstellbare genaue Spannungsquellen verwenden um ohne U_0 ein Brückengleichgewicht zu erzeugen. Auf diese Weise läßt sich mit modernen Mitteln eine automatisch abstimmbare Brücke mit hoher Genauigkeit aufbauen. Dabei wird als Nullinstrument ein elektronischen Nanovoltmeter mit Auslesemöglichkeit verwendet.

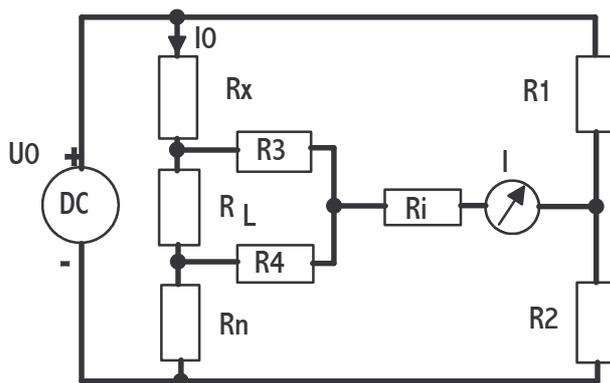
Um auch sehr kleine Widerstände messen zu können, wurde die Thomson-Brücke entwickelt, die man auch unter dem Namen Kelvindoppelbrücke kennt. Nach einer Dreieck-Stern-Umwandlung von R_3, R_4, R_L folgt die Abgleichbedingung von $I=0$.

$$(R_N R_1 - R_X R_2) * (R_3 + R_4 + R_L) = R_L * (R_2 R_3 - R_1 R_4)$$

Mit der Bedingung $R_2 * R_3 = R_1 * R_4$ folgt.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (2.26)$$

$$R_X = R_N * \frac{R_1}{R_2} = R_N * \frac{R_3}{R_4} \quad (2.27)$$



Es fällt der Leitungswiderstand R_L aus den Gleichungen weg. R_1, R_2, R_3, R_4 sind mechanisch so gekoppelt, daß Gleichung 2.26 erfüllt ist, und R_1 bis $R_4 \gg R_X, R_N$ ist erfüllt. So wird der Strom durch die Brücke gering. R_X und R_N werden nur über die Potentialklemmen mit der Brücke verbunden und der Strom I_0 über die Quelle eingespeist. Der Widerstandsbereich wird von 1 Ohm bis $1 * 10^{-6}$ Ohm angegeben. Die Meßunsicherheiten sind ähnlich wie die der Wheatstone- Brücke.

Das absolut genaueste Instrument um Widerstände, besonders im Bereich 1mOhm bis 1kOhm, zu bestimmen, ist der Stromkomparator nach Kusters. Der Komparator ist unter dem Typ 9975 bei Guildline erhältlich. Es wird das Widerstandsverhältnis in einer Substitutionsmessung zwischen einem externen Normalwiderstand und dem Prüfling bestimmt. Auch hier finden wir wieder eine Brückenschaltung vor. Zwei gegenläufig gewickelte Windungen haben bei gleichen Windungszahlen dann im Kern, hier ein hochpermeabler weichmagnetischer Ring, den Fluß Null erzeugt, wenn der Strom $I_X = I_N$ ist. Allgemein gilt Gleichung 2.28.

$$\frac{I_X}{I_N} = \frac{n_N}{n_X} \quad (2.28) \quad \text{mit Det.}=0$$

$$\Phi_{Spule} = \int B * dA = \frac{\mu * A * n * I}{l} \quad (2.29)$$

Ob der Fluß, siehe Gleichung 2.29, null ist, kann bei Wechselstrom leicht mit einer Detektorwicklung festgestellt werden. Bei Gleichstrom muß durch eine Generatorwicklung dem Gleichfluß ein Wechselfluß überlagert werden. Dazu wird über eine weiter Wicklung die Flußdichte im Eisenkern bis zur Sättigung mit rechteckförmiger Wechselspannung moduliert.



Abb.10 Comparator-Resistance-Bridge 9975

Nun können bei Brückenungleichgewicht kurze Spannungsspitzen mit einem Spitzenwertdetektor festgestellt werden. Dies sind die geradzahligen (2.Ordnung) Oberschwingungsanteile des Modulationssignals. Die Bedingung, daß der Fluß Null sein soll entspricht der Aussage Detektor ist Null und wird von selbst mit dem Detektor und einer automatisch regelbaren Stromquelle erfüllt. Weiterhin muß gelten für das Galvanometer gleich Null: $I_X \cdot R_X = I_N \cdot R_N$.

$$\frac{I_X}{I_N} = \frac{R_N}{R_X} \quad (2.30)$$

Nur wenn beide Nullbedingungen erfüllt sind, $G=0$ und $D=0$, kann aus Gleichung 2.28 und 2.30 der gesuchte Widerstand bestimmt werden.

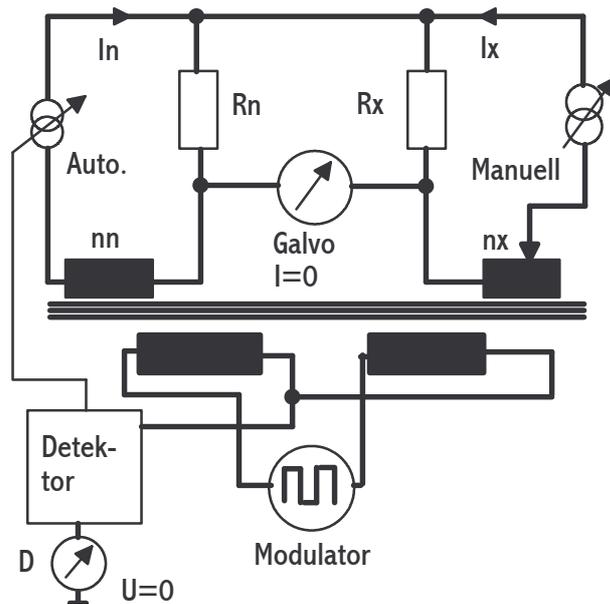
$$R_X = R_N \cdot \frac{n_X}{n_N} \quad (2.31)$$

Durch das Einstellen von n_X wird das Galvanometer zur Nullanzeige gebracht und so das Widerstandsverhältnis ablesbar. Um einen Teil Windungen zu sparen, werden auch Widerstände zur Stromteilung in den hinteren Dekaden, wo dies für die Gesamtunsicherheit nicht so bedeutend ist, eingesetzt, da der magnetische Fluß proportional zu $n \cdot I$ ist. Auch n_N ist zur optimalen Anpassung umschaltbar (1,10,100,1000-Ohm) gemacht. Vorteile des Stromkomparators sind: vierpolige Widerstandsmessung, Thermospannungskompensation durch Polaritätsumkehr der Meßspannung, Meßgenauigkeit hängt hauptsächlich von einem Windungszahlverhältnis ab, welches nicht wie Widerstände mit der Zeit altern kann, Schalterprobleme fallen durch die Konstruktionsart fast weg.

$$\frac{P_N}{P_X} = \frac{R_X}{R_N} \quad (2.32)$$

Wie aus Gleichung 2.32 zu ersehen, können niederohmige Widerstände mit hohen Strömen gemessen werden, ohne das dies zu einer erhöhten Eigenerwärmung des Normals führt.

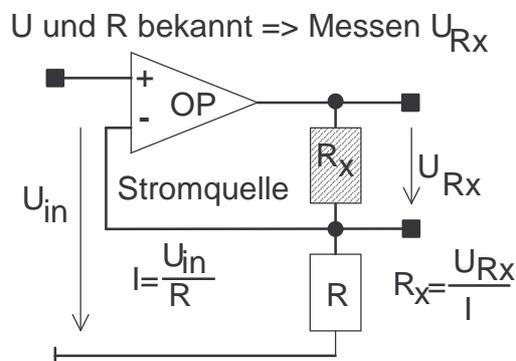
Beispiel: Guildline 9975 mit 9923 4polig 0.1mOhm bis 1MOhm
 Auflösung bis zu 0.01ppm (0.1Ohm bis 10kOhm) Unsicherheit ohne Normal 0.2ppm
 Meßunsicherheit PTB: 1Ohm ± 0.5 ppm; 0.1Ohm $\geq \pm 10$ ppm 10kOhm $\geq \pm 1$ ppm.
 Rauschen 1nA bzw. 0.3 μ A



Bei allen Meßtechniken sind die folgenden Fehlerquellen zu beachten: Leitungswiderstände (nicht bei echter Vierpoltechnik); Leckwiderstände besonders bei hochohmigen Widerständen; Thermospannungen, die durch Umpoltechnik oder Messung in einer

stromlosen Pause herausgerechnet werden können; Rauschen; Erwärmung von Prüfling und Normal; Temperaturkoeffizienten der Normal- und Teilerwiderstände.

Die Messung von Hochohmwiderständen kann mit normalen Brückenschaltungen erfolgen, was aber wegen der hohen Zeitkonstanten und begrenzten Meßspannungen zu Problemen führt. So ist bei 10 pF Zuleitung und 1 TOhm Widerstand schon eine Zeitkonstante von 10 Sekunden zu beachten. Auch die beträchtliche nichtlineare Spannungsabhängigkeit der Prüflinge hat eine optimale Meßspannung von nur 10 Volt in Ausnahmefällen 100 Volt ergeben. Daher muß den Prüflingen eine Minutenlange Einlaufphase zugebilligt werden. Auf eine sorgfältige elektrostatische Schirmung muß geachtet werden. Bei der Keithlymeßbrücke wird daher der Prüfling in der Brücke hinter einer Metallklappe vermessen. Eine Bestimmung des Widerstandes über eine Entladung mit einem Kondensator kommt wegen der geringen Unsicherheit nicht in Betracht, obwohl sich dies gerade für extrem hohe Widerstände anbietet. Die auf dem Markt befindlichen hochauflösenden Digitalvoltmeter bieten auf einfache Weise die Möglichkeit Substitutionsmessungen im mittleren Widerstandsbereich mit geringsten Meßunsicherheiten durchzuführen.



Die Multimeter besitzen dazu für die Bereiche umschaltbare Präzisionskonstantstromquellen, die einen geringen Meßstrom durch den Widerstand leiten und so einen Spannungsabfall (U_{R_X}) erzeugen. Dieser wird mit dem Spannungsmeßmodul bestimmt und aus der Umrechnung mit dem ohmschen Gesetz ergibt sich dann der Widerstandswert (R_X). Die Steuerspannung (U_{in}) und der Vergleichswiderstand (R) lassen sich sehr genau darstellen. Die Messung von Normal und Prüfling mit gleichem Nennwert und im selben Meßbereich müssen zeitlich kurz hintereinander und wechselseitig mehrere Male durchgeführt werden, um aus den Meßwerten den Mittelwert und die Standardabweichung zu bestimmen. Unter Verwendung von Präzisionsschaltern, die thermospannungsarm und vierpolig ausgelegt sein müssen, läßt sich diese Verfahren auch automatisieren. Für die Substitution mit den Anzeigen (A) beider Messungen und Widerstandswerten gilt die Gleichung 2.33.

Unter Verwendung von Präzisionsschaltern, die thermospannungsarm und vierpolig ausgelegt sein müssen, läßt sich diese Verfahren auch automatisieren. Für die Substitution mit den Anzeigen (A) beider Messungen und Widerstandswerten gilt die Gleichung 2.33.

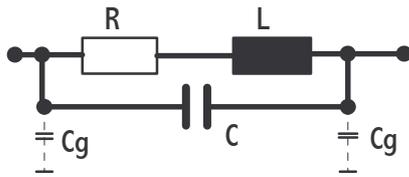
$$R_X = \frac{A_X}{A_N} * R_N \quad (2.33)$$

Für die Unsicherheitsberechnungen werden außer der Standardabweichung und der Unsicherheit des Normals die 24-Sunden Spezifikationen (Stabilitätsangabe) oder ein Zehntel der Jahresspezifikationen für das Multimeter herangezogen. Es gibt auch Multimeter mit Angaben zur Transferunsicherheit innerhalb von 20 Minuten. Diese Spezifikationen können dann je nach Hersteller in den Bereichen 10 Ohm bis 1MOhm zwischen 1.5ppm und 3.5ppm liegen.

Beispiel: Für eine 100 kOhm-Substitution ergibt dies in der Praxis eine Abweichung vom wahren Wert einschließlich der Unsicherheit des Normals zwischen 0.1ppm und 1.7ppm.

2.8 Wechselstromwiderstände

Diese Widerstände sind zwar nicht so genau und stabil wie Gleichstromnormalwiderstände, aber zeigen dafür durch ihre spezielle Konstruktion ein recht gutes Wechselstromverhalten zum Teil bis in den GHz-Hochfrequenzbereich hinein. Dazu muß der induktive Anteil L und der kapazitive Anteil C des Widerstandes möglichst klein gehalten werden. Es gibt leider



mehrere komplexe Gleichungen und Ersatzschaltbilder um den realen Widerstand zu beschreiben. Am allgemeinsten und gebräuchlichsten ist das mit R und L in Reihe parallel zu C. Hier wurden schon die Kapazitäten gegen das Gehäuse Cg und die Zuleitungsinduktivitäten vernachlässigt, beziehungsweise sie sollen mit im Modell enthalten sein.

$$\underline{Z} = \frac{(R+j\omega L) * \frac{1}{j\omega C}}{(R+j\omega L) + \frac{1}{j\omega C}} \quad (2.34)$$

$$\underline{Z} = \frac{R+j\omega L}{j\omega CR - \omega^2 LC + 1} * \left(\frac{1 - \omega^2 LC - j\omega CR}{\dots} \right) \quad \text{kürzen (*1) und zusammenfassen} \Rightarrow$$

$$\underline{Z} = \frac{R+j\omega(L - \omega^2 L^2 C - CR^2)}{1 + \omega^2(C^2 R^2 - 2LC + \omega^2 L^2 C^2)} \quad (2.35)$$

$$|\underline{Z}| = Z = \frac{\sqrt{R^2 + (L(1 - \omega^2 LC) - R^2 C)^2}}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (R\omega C)^2} \quad (2.36)$$

Eine andere Art der Auflösung (*jwC) von Gleichung 2.34 lautet folgendermaßen.

$$\underline{Z} = \frac{R+j\omega L}{j\omega CR - \omega^2 LC + 1} \quad (2.37) \quad \text{bzw.} \quad |\underline{Z}| \approx R * \sqrt{\frac{1 + (\frac{\omega L}{R})^2}{1 + (\omega CR)^2}} \quad (2.38)$$

$$f_{Res.} = \frac{1}{2\pi} * \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (2.39)$$

Bei Gleichung 2.38 wurde der Term LC aus 2.37 vernachlässigt. Die Resonanzfrequenz aus Gleichung 2.39 ergibt sich mit dem Ersatzschaltbild des Widerstandes, das dem eines Parallelschwingkreises entspricht. Die Gleichung 2.35 kann vereinfacht werden wenn die L-Teile größer und die C-Teile kleiner als R sind. Da die Produkte L²*C, C*C, L*C und L²*C² sehr klein gegenüber den anderen Termen sind, da L und C < 1*10⁻⁴ diese Werte haben. Auch Gleichung 2.38 zeigt, daß bei niederohmigen Widerständen der Zähler und bei hochohmigen Widerständen Nenner unter der Wurzel groß werden.

$$\underline{Z} \approx R + j\omega(L - CR^2) = R * (1 + j\omega(\frac{L}{R} - RC)) \quad (2.40)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2(L - CR^2)^2} \quad (2.41)$$

Im Idealfall wäre der Imaginärteil gleich Null und aus Gleichung 2.40 folgt dann L=C*R².

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.42)$$

Wenn R diesem Verhältnis entspricht, dann ist so $\underline{Z} = R$ und der Widerstand somit reell. Man kann auch die Gleichungen mit Zeitkonstanten beschreiben.

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad \tau_C = R * C \quad \tau = \tau_L - \tau_C \quad (2.43)$$

$$\underline{Z} = R * (1 + j\omega\tau) \quad (2.44) = (2.40)$$

Gleichung 2.34 kann für die Zeitkonstantenbetrachtung in Leitwertform angegeben werden.

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} * \frac{1 - j\omega\tau + j\omega^2 LC * \omega\tau_L}{1 + \omega^2\tau_L^2} \quad (2.45)$$

Aus den Gleichungen ist zu ersehen, daß kleine Widerstände induktiv (zB. Skineffekt) sind (R < 300 Ohm ; L/R > R*C) und große Widerstände kapazitiv wirken (R > 500 Ohm; L/R < R*C).

Dies zeigt auch Gleichung 2.40. Es gilt mit R klein (positiv) => C*R² klein gegenüber L und R groß (negativ) => C*R² groß gegenüber L.

Beispiel: C=0.8pF; L=80nH; =>R=316 Ohm ; GL. 2.42. All. Zeitkonst. < 1*10⁻⁹sec.

Auf Grund der gewonnen Erkenntnisse kann man für den untern und den oberen Frequenzbereich ein eigenes sehr einfaches Ersatzschaltbild vereinbaren.

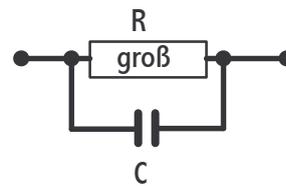
$$\underline{Z} = R + j\omega L \quad (2.46)$$



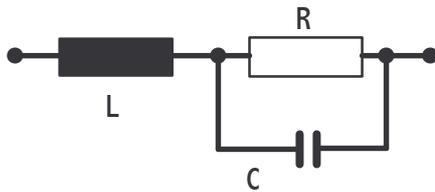
$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (2.47)$$

$$\underline{Z} = \frac{R - j\omega CR^2}{1 + (\omega C)^2 R^2} \quad (2.48)$$

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega C)^2 R^2}} \quad (2.49)$$



Man beachte, daß das gedachte C nicht ideal ist und einen realen frequenzabhängigen Verlustfaktor besitzt; R_C = 1/(DwC). Ein weiteres Ersatzschaltbild von HP (Keysight) vorgeschlagen ergibt etwas andere Formeln.



$$\underline{Z} = j\omega L + \frac{R * \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (2.50)$$

$$\underline{Z} = \frac{j\omega L * (1 + j\omega RC) + R}{1 + j\omega RC} * \left(\frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right) =>$$

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j \frac{\omega L - \omega CR^2 + \omega^3 LC^2 R^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (2.51)$$

Bei der Gleichung fällt besonders auf, daß gegenüber Gl. 2.40 der Realteil hier frequenzabhängig ist. Diese Teil bezeichnet man auch als R_S=ESR=Equivalent-Series-Resistor. Mit der Zeitkonstante folgt die Gleichung 2.52 (siehe Bode -40dB/Dekade Addition). R_S ist der Gleichung 2.35 ähnlich, wenn man dort nur den Realteil beachtet und im Nenner die LC-Terme vernachlässigt.

$$R_S = R * \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} = R * \frac{1}{1 + (\omega \tau_C)^2} \quad (2.52)$$

Genrad gibt noch einen R_P=EPR=Equivalent-Parallel-Resistor an, der für niedrige Widerstände den Verlauf bestimmt und eine stärkere Wirkung wie Gl. 2.47 hat.

$$R_P = R \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \right) \quad (2.53)$$

Mit den Gleichungen wurden reale Widerstände zwischen 0.01 Ohm und 1MOhm berechnet.

$$\omega = 2\pi f \quad (2.54)$$

Beispiel: Z1~ 0.8pF / 80nH (ALU-Visha); Z2~2.5pF / 100nH (<100Ohm) bis 3μH (>100Ohm)(GR 1440).

Folgende Übereinstimmung von Formel und Praxis (Nur Frequenzgang):

0.01bisOhm 100 Ohm	Gl. 2.47 = Gl. 2.41 Gl. 2.53	Wert steigt mit f Wert steigt stark mit f
1kOhm	Gl. 2.49 = Gl. 2.52 Gl. 2.36 = Gl. 2.47 Gl. 2.41	Wert sinkt mit f Wert steigt mit f Wert steigt schwach mit f
10k bis 1MOhm	Gl. 2.34=2.53 Gl. 2.36 = Gl. 2.52 Gl. 2.49	Wert steigt stärker mit f Wert sinkt mit f Wert sinkt nicht so stark mit f

Widerstand[Ohm]	Gl.	Alu ±0.1%	±0.01%	1440 ±0.1%	±0.01%	je Fr. in Hz
0.01	2.47=2.41			1k	200	
	2.53			500	200	
0.1	2.47=2.41			7k	2k	
	2.53			5k	2k	
1	2.47=2.41	90k	30k	60k	20k	
	2.53			50k	20k	
	Messung	100k	30k			
10	2.47=2.41	900k	300k	600k	200k	
	2.53			500k	200k	
	Messung	500k	100k			
100	2.47=2.41	9M	3M	100k	50k	
	2.53			100k	30k	
	Messung	800k	200k			
1k	2.47	>11M	>11M	2M	700k	
	2.49	9M	2M	3M	800k	
	2.41	10M	3M	>10M	5M	
	2.53			1M	300k	
	Messung	700k	200k			
10k	2.36=2.52	600k	200k	200k	70k	
	2.49	900k	300k	300k	90k	
	Messung	200k	40k			
100k	2.36=2.52	60k	20k	20k	7k	
	2.49	90k	30k	30k	9k	
	Messung	50k	10k			
1M	2.36=2.52	6k	2k	2k	700	
	2.49	9k	3k	3k	900	
	Messung	10k	2k			
10M	2.36=2.52	600	200	x	x	
	2.49	900	300	x	x	
	Messung	1k				



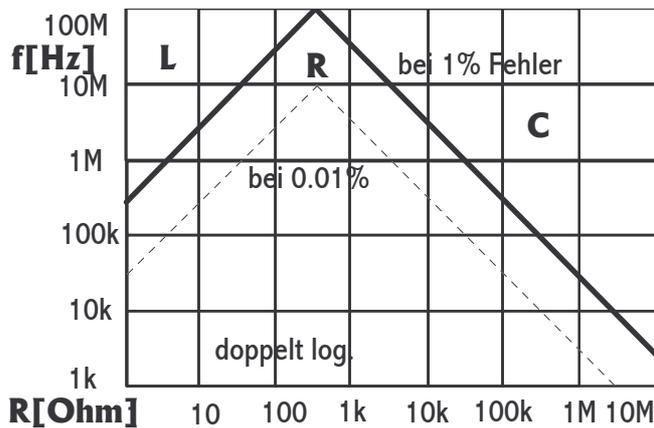
Werte	DC[%]	1	10	100	1k	10k	100k	1M [Ohm]	Fr. bei 0.1% (Herst.)
Genrad (1440)	0.01	300k	1M	3M	2M	200k	20k	2K	Einzel:10ppm/Jahr
Genrad (1433)	0.02+2m	500k	1M	4M	3M	200k	10k	1k	Decade in Hz

zu 1433: $L_0=0.1\mu\text{H}+0.2\mu\text{H}$ je Stellung; $C_0\sim 15\text{pF}$ je Decade bis zu 45pF => Frequenzgang mit 2.52.

Aus den Beispielen ergibt sich für die Messung der Widerstände:

Widerstand bis 1kOhm Serienerstschaltbild

Widerstand über 1kOhm Parallelerstschaltbild



Bei sehr hochohmigen Widerständen kann der Imaginärteil $X_{CP} < R$ sein. Allgemein bedeutet, wie über die Berechnungen nachzukontrollieren ist, eine Erniedrigung der Unsicherheit um den Faktor 100 eine Frequenzerniedrigung um den Faktor 10 ($1\% = 270\text{kHz} \Rightarrow 0.01\% = 27\text{kHz}$).

$$\Delta 10\% = 3 * f_{1\%}$$

Beispiel: $1\% = 100\text{kHz} \Rightarrow 10\% = 300\text{kHz}$

Die Resonanzfrequenz des Widerstandes bestimmt sich mit Gleichung 2.39. Besonders bei drahtgewickelten Widerständen und hohen Frequenzen macht sich der Skineffekt bemerkbar, das heißt die Induktivität ist dominant bei niederohmigen Werten. Allgemein wird durch spezielle Wickeltechniken (bifilar, Ayrton-Perry-Kreuzwicklung) der Induktivitätswert klein gehalten. Die Kapazitäten entstehen zwischen den Windungen zum Windungskörper oder gegen Erde-Masse. Um bei großen Widerständen kapazitätsarm zu wickeln, werden die Windungen in Abschnitte unterteilt. Kompensation ist nur dann möglich, wenn die Drahtlänge $> 1/8$ der Betriebswellenlänge ist. Präzisionswiderstände für niedrige Wechselspannung waren früher fast immer drahtgewickelt, jedoch für höhere Frequenzen sind spezielle Schichtwiderstände vorhanden. Gute Eigenschaften haben auch runde, normale Kohle- und Metallfilmwiderstände. Bei Hochstromwiderständen, die niederohmig sind, ist der induktive Anteil dominant. Deswegen steigt der Widerstandswert bei 20kHz und 2A um 0.03% und bei 10A um 0.7% an. Dies gilt nur für Präzisionswiderstände und liegt bei normalen Wechselstromwiderständen bei etwa 0.5% um 10kHz und weniger als 10A.



Abb.11 Genrad 1440 Widerstand

Besonders störend macht sich bei Leitern der Skineffekt als eine Erhöhung des Widerstandes und der Induktivität im schnellen Wechselfeld bemerkbar. Der Strom wird dabei durch innere magnetische Felder an den Außenrand des Leiters gedrängt und fließt daher in einem kleineren effektiven Querschnitt. Es sind die Gleichungen 2.55 bis 2.57 gültig.

$$x_S = \frac{r}{2} * \sqrt{\pi f \sigma \mu} \quad (2.55)$$

$$R = R_0 * (1 + \frac{1}{3} * x_S^4) \quad (2.56) \quad \text{für } x_S < 1$$

$$R = R_0 * (x_S + \frac{1}{4} + \frac{3}{64 * x_S}) \quad (2.57) \quad \text{für } x_S > 1$$

Es ist r der Radius des Drahtes in cm, f die Frequenz in Hz, Sigma=57*10⁴ bei Kupfer und μ=1.257*10⁻⁸. Mit R₀ ist der Gleichstromwiderstand gemeint und die Gleichungen 2.56 und 2.57 können durch Umformen die Widerstandserhöhung als Faktor (R/R₀) angeben. Die Erhöhung des Widerstandes bei großen Frequenzen tritt in der Realität durch die starke kapazitive Komponente der hochohmigen Widerstände nicht in Erscheinung.

Beispiel: Durchmesser eines Kupferdrahtes d=0.5mm => r=0.025cm. Für verschiedene Frequenzen gilt für R/R₀ (Faktor der Widerstandserhöhung nur durch Skineffekt):

1kHz:1.000004; 10kHz:1.00040; 100kHz:1.041 (+4%!) 1MHz:2.17 10MHz:6.16 100MHz:19.05
 Bei einem Kabel von d=1mm gilt: 10kHz:1.006 100kHz:1.47 1MHz:4 10MHz:12

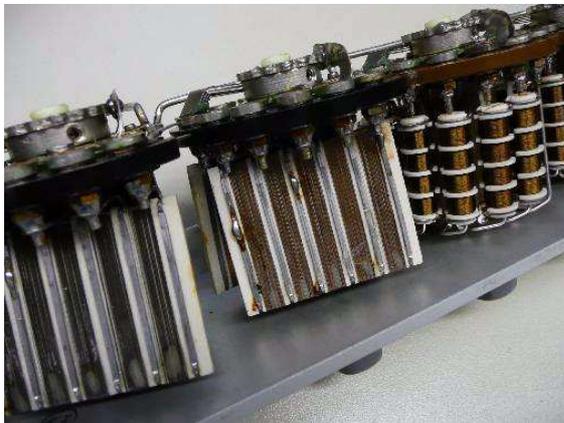


Abb.12 Genrad 1433 Dekadenwiderstand

Bei Widerstandsdekaden ist es auf Grund des Aufbaus schwieriger relativ gleichmäßige Frequenzgänge zu erreichen, da sie ja auch von der Kombination der Schalterstellungen abhängen. Wie auf dem Bild 11 zu erkennen ist, sind die Widerstände der Genard Dekade gewickelt und mit robusten Schaltern versehen, was entscheidend für ein gutes Gleichstromverhalten und gute Reproduzierbarkeit ist.

Bei den Widerständen verwendete Materialien und deren Parameter:

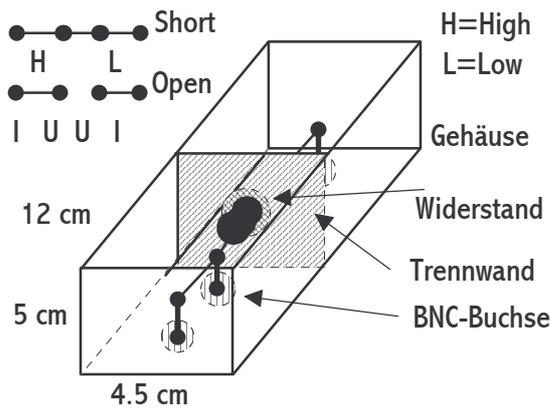
Größe	Kohle	Metalloxid	Draht	Metall-Schicht
Werte[Ohm]	10-20M	10-5M	0.1-10M	1-1M
TK [% /°C]	±0.05-0.15	0.05	0.005	0.001
Sp.Koef. [% /V]	-0.02	-0.005	-	-
C [pF]	0.2-0.5	0.3-0.6	0.8	0.5
L [μH]	-	-	0.03-2.5	0.08

TK von Widerständen liegt bei 1μV bis 30μV

Ein Stück dünner Draht hat schon eine Induktivität von etwa 10nH pro cm. Daher ist der Aufbau eines Normal für RLC-Brücken in einem speziellen Gehäuse von großer Wichtigkeit. Als Beispiel dient hier ein vierpoliges Wechselspannungswiderstandsnormale. Es besteht aus einem Metallgehäuse, das mit vier



Abb.13 RCL- Messwiderstand

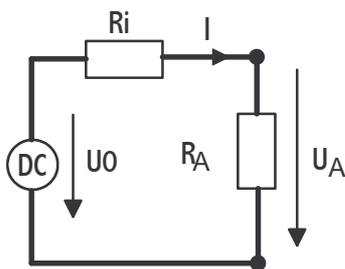


BNC-Buchsen, zum direktem kabellosen Anschluß von RLC-Meßbrücken, versehen ist. In der Mitte befindet sich innen eine Metalltrennwand mit einer Öffnung für die Meßwiderstände, die eine kapazitive Abschirmung zwischen den positiven und negativen Buchsen bewirkt. Um korrekte Messungen an den Meßbrücken durchführen zu können, gibt es sowohl ein OPEN-Normal, als auch ein SHORT-Normal in gleicher Bauausführung für die Kalibriermessung. Dadurch werden die induktiven und kapazitiven Anteile des Gesamtaufbaus herausgemessen und nur noch die geringen störenden Anteile des Meßwiderstandes sind dann zu beachten. Hiermit können LCR-Meter bis zu 10 MHz überprüft werden. Der Widerstand ist ein induktivitäts- und kapazitätsarmer Vishay-Rig Widerstand.

baus herausgemessen und nur noch die geringen störenden Anteile des Meßwiderstandes sind dann zu beachten. Hiermit können LCR-Meter bis zu 10 MHz überprüft werden. Der Widerstand ist ein induktivitäts- und kapazitätsarmer Vishay-Rig Widerstand.

2.9 Sondermessungen

Den Innenwiderstand R_I am Ausgang einer Quelle kann man durch zwei Spannungsmessungen (Index:1/2) mit zwei verschiedenen Lasten R_A ermitteln.



$$R_I = \frac{U_{A1} - U_{A2}}{\frac{U_{A2}}{R_{A2}} - \frac{U_{A1}}{R_{A1}}} = \frac{U_{A1} - U_{A2}}{I_{A2} - I_{A1}} = \frac{\Delta U}{\Delta I} \quad (2.58)$$

Wenn die erste Messung im Leerlauf ($I_{A1}=0$) durchgeführt wird, mit $U_{A1}=U_0$, gilt mit $R_{A1} = \infty$: aus Gleichung 2.58.

$$R_I = R_{A2} * \frac{U_0 - U_{A2}}{U_{A2}} = R_{A2} * \left(\frac{U_0}{U_{A2}} - 1 \right) \quad (2.59)$$

Beispiel: Mit Gleichungen 2.58 und 2.59
 $U_0 = 0,9897V$ und $U_{A2} = 0,497V$ und $R_{A2} = 10k\Omega$

$$R_I = 10k * \frac{0,9897V - 0,497V}{0,497V} = 9,9k \text{ Ohm}$$

Wenn $R_A = R_I$ dann ist $U_A = U_0 / 2$ (Leistungsanpassung) $\Rightarrow P = \frac{U_0^2}{4 * R_I}$

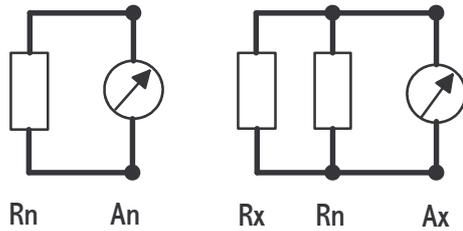
Bei einer praktischen Messung wird das DVM hochohmig und der Lastwiderstand parallel zum DVM bei der zweiten Messung als niederohmig dazu betrachtet. Nur so ist der Messfehler gering und es kann R_{A1} als unendlich betrachtet werden.

Für die übliche Substitution, bei der die Anzeige von Normal und Prüfling in Verhältnis gesetzt und mit dem wahren Wert des Normal verrechnet wird, gilt die Standardgleichung 2.60. Sie wird aus der Beziehung ($A_X/A_N = R_X/R_N$) abgeleitet, wobei A=Anzeige bedeutet und der Index N=Normal und X=Prüfling.

$$R_X = R_N * \frac{A_X}{A_N} \quad (2.60)$$

Sie wird angewendet, wenn das DVM zwar eine hohe Auflösung, aber ein nicht so hochwertig eingebauten Vergleichswiderstand hat.

Bei der Parallelsubstitution, wird zu einem Normal ein Prüfling parallel geschaltet und für beide Fälle die Anzeige ermittelt und so R_X bestimmt. Diese Meßart kann angewendet werden, um hochohmige Widerstände in einem niedrigeren Meßbereich zu bestimmen

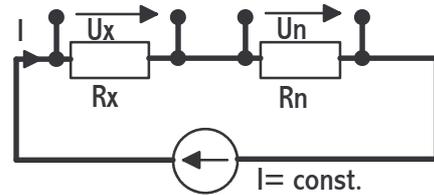


$$\frac{A_N}{A_X} = \frac{R_N}{\frac{R_N * R_X}{R_N + R_X}} = \frac{R_N + R_X}{R_X}$$

$$R_X = \frac{R_N * A_X}{A_N - A_X} \quad (2.61)$$

Beispiel: $R_N=1.00004\text{M}\Omega$; $A_N=1.00005\text{M}\Omega$; $A_X=0.909089\text{M}\Omega$ $\Rightarrow R_X=9.99467\text{M}\Omega$. Messungen erfolgen beide im $1\text{M}\Omega$ Bereich!

Bei der Messung der Widerstände bei gleichem konstanten Laststrom, die in Reihe geschaltet werden, ist eine zweifache Spannungsmessung nötig. Erste Messung $U_X =$ Prüfling und zweite $U_N =$ Normal. $I=(U_X/R_X)=(U_N/R_N) \Rightarrow$

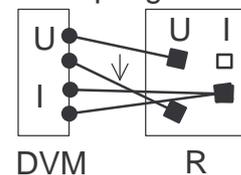


$$R_X = \frac{U_X}{U_N} * R_N \quad (2.62)$$

Die Gesamtunsicherheit bei den Substitutionsmessungen wird üblicherweise mit der quadratischen Addition der Meßunsicherheit des Verfahrens und der Unsicherheit des Normal bestimmt. Wenn der eingepreßte Strom instabil ist, was bei großen Strömen und Speisung mit Netzteilen zu erwarten ist, sollten zwei gleiche Multimeter parallel betrieben werden und manuell gleichzeitig getriggert werden, bei gleicher Messzeit. So werden die Stromschwankungen unterdrückt, da sie ja gleichzeitig auf beide Messungen wirken.

Beim Nullen eines vierpoligen Widerstandes bei vierpoliger Messung sollte die Anschlußtechnik in der Abbildung beachtet werden.

Nullen am Widerstand 4 polig



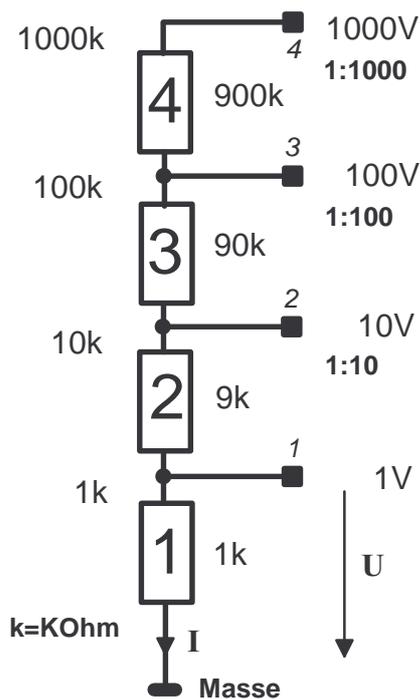
2.10 Teiler für Gleichspannungsrückführung

Der Präzisionswiderstandsteiler für Gleichspannungsmessungen von 1V bis 1000 V ist diskret mit Einzelwiderständen aufgebaut. Ein ähnlicher Aufbau ist auch in der Master-Volt-Ratio-Box 9700PL (0,15V bis 1500V) von Guildline vorhanden. Er dient dazu die Spannungen über 1,2 Volt auf eine für den Komparator meßbare Spannung von etwa maximal 1 Volt zu teilen um so auch einen direkten Anschluß an Normal-Westonelemente zu ermöglichen.

Der Präzisionsspannungsteiler besteht aus einer Reihenschaltung von 28 Normalwiderständen (AEG/1W) ($10 * 1\text{ k}\Omega + 9 * 10\text{ k}\Omega + 9 * 100\text{ k}\Omega$)

Die Normalwiderstände wurden auf möglichst gleiche Temperaturabhängigkeit ausgesucht. Somit wurde gewährleistet, dass sich die Teilverhältnisse im Temperaturbereich $(23 \pm 1)^\circ\text{C}$ nur sehr geringfügig ändern und sich daher eine extra Thermostatisierung für die angestrebten Messunsicherheiten erübrigen ließ.

Die $1\text{ k}\Omega$ Normalwiderstände wurden mit Parallelwiderständen auf eine relative Widerstandsdifferenz von $< 1 * 10^{-6}$ korrigiert.



Alle Normalwiderstände befinden sich in einem doppelwandigen Stahlgehäuse auf einer Isolierplatte. Sie sind mit vergoldeten Kupferlaschen zusammenschaltet. Die Eingangs- und Ausgangsklemmen des Teilers bestehen aus vergoldeten Kupferklötzen. Diese sind auf einer Teflonplatte montiert.

Die Kalibrierung des Spannungsteilers geschieht entweder durch Ausmessen des einzelnen Normalwiderstände in Bezug auf den Ausgangswiderstand $R_1=1k\Omega$ und der Berechnung der Teilverhältnisse mit diesen Messergebnissen oder durch einzelnen 1/10 Teilerspannungsmessungen mit einem hochauflösendem und linearen DVM im 10V-Bereich. Das es bei beiden Messungen auf Verhältnisse ankommt, werden die Messungen zügig mit hoher Auflösung durchgeführt. Besonders die Kurzzeitdrift des Multimeters hat einen entscheidenden Einfluß auf die Messunsicherheit der Messungen.

Die folgende Tabelle gibt die technischen Daten des Teilers wieder.

Bezeichnung	Teiler: 1000	Teiler: 100	Teiler: 10
Teilverhältnis	1:1000	1:100	1:10
Max. Eingangsspannung	1000 V	100 V	10 V
Eingangswiderstand	$1 \cdot 10^6$ Ohm	$1 \cdot 10^5$ Ohm	$1 \cdot 10^4$ Ohm
max. Ausgangsspannung	1 V	1 V	1 V
Ausgangswiderstand	1000 Ohm	1000 Ohm	1000 Ohm

2.10.1 Berechnung der Teilverhältnisse für Widerstandskalibrierung

Bei der Berechnung der Teilverhältnisse auf Grund der Messungen, wird davon ausgegangen, dass das ideale Verhältnis (10/100/1000) wegen der nicht idealen Widerstände um einen Fehler abweicht. Bezugswiderstand ist immer der Widerstand R_1 mit $1k\Omega$.

Für das Teilverhältnis (TV) 10:1 werden daher zusätzlich zu R_1 die Widerstände R_2 bis R_{10} ($n=i$) bestimmt.

$$\Delta r_i = \frac{r_i - r_1}{r_1} \Rightarrow r_i = r_1(1 + \Delta r_i) \quad (2.63)$$

Mit Gl.(2.63) werden von allen neun Widerständen die relative Widerstandsdifferenz (Δr_i) zu R_1 bestimmt. Das Spannungsteilverhältnis 10/1 ist das Verhältnis der Summe aller zehn Widerstandswerte zu dem R_1 . Für die Widerstandsmesswerte (r_i) gilt dann die folgende Gleichung mit (2.63) eingesetzt.

$$TV_{10} = \frac{\sum_{i=1}^{10} r_i}{r_1} = \frac{\sum_{i=1}^{10} r_1(1 + \Delta r_i)}{r_1} = \sum_{i=1}^{10} (1 + \Delta r_i) = 10 + \sum_{i=1}^{10} \Delta r_i \quad (2.64)$$

Wie aus Gleichung (2.64) zu erkennen ist, bestimmt sich das Widerstandsverhältnis aus dem Wert 10 und der Summe aller relativen Widerstandsabweichungen.

Für das Teilverhältnis 100:1 wird Summe der Widerstände R1 bis R10 als Bezug zu R11 bis R19 (n=j) gemessen.

$$\Delta r_j = \frac{r_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_i}{\sum_{i=1}^{j-1} r_i} \quad (2.65)$$

Gleichung (2.65) ist vergleichbar mit (2.63) und auch nach r_j auflösbar. Ähnlich wie oben wird das Verhältnis 100/1 als die Summe aller Widerstände bis R19 zu R1 dargestellt. Mit Umwandlungen und Verwenden von Gl.(2.65) und (2.64) ergibt dies die folgende Gleichung.

$$TV_{100} = \frac{\sum_{i=1}^{i=10} r_i + \sum_{j=11}^{j=19} r_j}{r_1} = TV_{10} * (10 + \sum_{j=11}^{j=19} \Delta r_j) \quad (2.66)$$

Mit der gleichen Vorgehensweise für das Verhältnis 1000/1 (n=k) gilt die Gleichung (2.67).

$$TV_{1000} = TV_{100} * (10 + \sum_{k=20}^{k=28} \Delta r_k) \quad (2.67)$$

Mit Hilfe der Gleichungen und der Widerstandsmessungen ist so eine genaue Bestimmung der gültigen Verhältnisse möglich, um so bei der Anwendung des Teilers als Korrekturfaktoren zu dienen.

2.10.2 Berechnung der Teilverhältnisse für Spannungskalibrierung

Bei dieser Messmethode werden nicht Differenzen, sondern Absolutmessungen bei 1V und 10V im 10V-Bereich des DVM durchgeführt. Benötigt wird dazu lediglich noch eine stabile 10V Gleichspannungsreferenz.

Es gibt drei Messungen von 1:10, zwischen den Punkten (siehe Zeichnung) 2:1, 3:2 und 4:3. Aus diesen können dann wie im folgenden hergeleitet wird, die echten Teilverhältnisse bestimmt werden.

[1:10] Für das Teilverhältnis (TV) zwischen den Punkten 2/1 und Masse gilt das selbe wie für das Messverhältnis (TM), da hier Messung und gesuchter Wert übereinstimmen.

$$TV_{10} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad (2.68)$$

Für die Messung gilt: $U_1 = I * R_1$ und $U_2 = I * (R_1 + R_2)$ mit Gleichsetzung vom Strom I,

$$TM_{10} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = TV_{10} \quad (2.69)$$

So einfach wie im ersten Fall wird es im weiteren Verlauf nicht mehr, da TV nicht mit TM übereinstimmen.

[1:100] Das Teilverhältnis bestimmt sich hier zwischen den Punkten 3/1 und Masse und das Messverhältnis zwischen den Punkten 3/2 und 1 als Bezugsmasse. Für das Teilverhältnis gilt: $U_1 = I * R_1$ und $U_3 = I * (R_1 + R_2 + R_3)$.

$$TV_{100} = \frac{U_3}{U_1} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1} \quad (2.70)$$

Für die Messung gilt: $U_2 = I * R_2$ und $U_3 = I * (R_2 + R_3)$.

$$TM_{100} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{R_2 + R_3}{R_2} \quad (2.71)$$

Es sind hier wie auch im folgenden Fall die Teilverhältnisse nicht gleich den Messverhältnissen. Daher ist eine Umformung nötig in der die Gleichung nur noch von Verhältnissen abhängig ist. Aus 2.68 folgt:

$$R_2 = R_1 * TV_{10} - R_1 = R_1(TV_{10} - 1) \quad (2.68a)$$

2.68a in Gleichung 2.71 eingesetzt und nach R_3 abgelöst ergibt:

$$R_3 = (TM_{100}(R_1(TV_{10} - 1)) - (R_1(TV_{10} - 1))) \quad (2.71a)$$

Die Terme für R_2 und R_3 aus den beiden Gleichungen 2.68a und 2.71a in Gleichung 2.70 eingesetzt ergibt die Lösung in 2.70a.

$$TV_{1000} = \frac{R_1 + R_1(TV_{10} - 1) + TM_{100} * (R_1(TV_{10} - 1)) - R_1(TV_{10} - 1)}{R_1} \quad (2.70a) \text{ mit } R_1 \text{ herausgekürzt}$$

$$TV_{1000} = 1 + 1(TV_{10} - 1) + TM_{100} * [1(TV_{10} - 1)] - 1(TV_{10} - 1) \quad (2.70b)$$



Abb.14 Ausschnitt Teiler mit Messlöchern für Stöpsle

[1:1000] Das Teilverhältnis bestimmt sich hier zwischen den Punkten 4/1 und Masse und das Messverhältnis zwischen den Punkten 4/3 und 2 als Bezugsmasse. Für das Teilverhältnis gilt: $U_1 = I * R_1$ und $U_4 = I * (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$.

$$TV_{1000} = \frac{U_4}{U_1} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{R_1} \quad (2.72)$$

Für die Messung gilt: $U_3 = I * R_3$ und $U_4 = I * (R_3 + R_4)$.

$$TM_{1000} = \frac{U_4}{U_3} = \frac{R_3 + R_4}{R_3} \quad (2.73)$$

Hier sind wie im 1:100 Fall wieder ähnliche Umformungen nötig. Die Gleichungen 2.68a für R_2 und 2.71a für R_3 werden in 2.72 eingesetzt. Für R_4 wird die umgeformte Gleichung 2.73 benötigt.

$$R_4 = TM_{1000} * R_3 - R_3 = R_3(TM_{1000} - 1) \quad (2.73a)$$

Im erster Zwischenschritt ergibt dies für 2.73.

$$TV_{1000} = \frac{R_1 + R_1(TV_{10} - 1) + R_3 + R_3(TM_{1000} - 1)}{R_1} \quad (2.72a)$$

Mit $R_1/R_1=1$ vorgezogen und R_3 eingesetzt ist TV_{1000} nur noch von Teilverhältnissen abhängig. (Klammern und Einser dienen teils nur zur Verdeutlichung)

$$TV_{1000} = 1 + 1(TV_{10} - 1) + TM_{100} * [1(TV_{10} - 1)] - 1(TV_{10} - 1) + [TM_{100} * \{1(TV_{10} - 1)\} - 1(TV_{10} - 1)] * (TM_{1000} - 1) \quad (2.72b)$$

Ein Vergleich mit Gleichung 2.70b zeigt einen weitere Vereinfachung und führt zur endgültigen Lösung. (eckige Klammer wichtig!)

$$TV_{1000} = TV_{100} + [TM_{100}(TV_{10} - 1) - (TV_{10} - 1)] * (TM_{1000} - 1) \quad (2.72c)$$

Beispiel: $TM_{10} = 10,00003$; $TM_{100} = 11,00008899$; $TM_{1000} = 11,00021285$ (10/0,909..) aus je zwei Spannungsmessungen. Mit 2.69 gilt : $TV_{10} = 10,00003$; Mit TV_{10} und TM_{100} in 2.70b : $TV_{100} = 100,001131$; Die entsprechenden Variablen in 2.72c : $TV_{1000} = 1000,031297$. (Klammern beachten)

2.11 Messunsicherheitsberechnung

Für die zwei Standardmessungen von Widerständen werden die Messunsicherheiten mit Berechnungsbeispiel vorgestellt

2.11.1 Substitutionsmessung von Widerständen

Bei der Substitutionsmessung werden die beiden Anzeigewerte von Normal und Prüfling mit dem Normalwert zum Wert des Prüflingswiderstands berechnet.

$$R_P = R_N * \frac{A_P}{A_N} \quad (2.73)$$

Zu Gl. 2.73: Mit allgemein: $R_P = A_P * MB$ und $R_N = A_N * MB$ für die beiden Messungen mit $MB = \text{Meß - Brücken-Faktor}$. MB ist für beide Messungen konstant anzusetzen, da Widerstände gleichen Nennwerts verglichen werden. $MB = R_N / A_N$ in Gleichung für R_P eingesetzt ergibt: $R_P = R_N * A_P / A_N$.

Die Meßunsicherheit wird geringer als bei der Direktmessung und hängt stark von der Meßunsicherheit des Normals ab.

Zur Berechnung des Meßergebnisses und Bestimmung der Meßunsicherheit wird die Modellgleichung benötigt. In der Modellgleichung wird nicht nur die Berechnung der Meßunsicherheit aufgestellt, sondern gleichzeitig die Berechnung des Meßwertes. Die einzelnen Terme erscheinen dann in einer Gesamttabelle mit ihren Zahlenwerten.

So gilt für die Modellgleichung bei Substitutionsmessung:

Meßergebnis des Prüflings = Normalwert \otimes Anzeigeverhältnis \oplus Unsicherheitsterme (δ_X)

Der Normalwert wiederum setzt sich aus dem eigentlichen Wert des Normals und den zugehörigen Meßunsicherheitsanteilen zusammen.

Es gelten die folgenden Abkürzungen:

R_P : Meßergebnis des Prüflings; Ergebnis der Messung mit Berechnung

R_N : Wert des Widerstandsnormals; kalibriert bei der PTB
diese Variable beinhaltet auch die eigene Meßunsicherheit nach PTB-Kalibrierschein

$R_N^\#$: Gesamtgleichung für das Widerstandsnormal mit Meßunsicherheiten

δU_{X1} : Temperatureinfluß auf das Normal. Er ergibt sich aus den Umgebungstemperaturschwankungen (Bezugswert 23°C). $\delta U_{X1} = k_t * dT$
Hierbei ist k_t der Temperaturkoeffizient des Widerstands

δU_{X2} : Abgeschätzte zeitliche Inkonzanz, die sich aus der Drift (Alterung) ergibt.

A_N : Anzeigewert bei der Messung des Normals

A_P : Anzeigewert bei der Messung des Prüflings

δA_{R0} : Unsicherheit bei der Nullung mit einem Kurzschluss

δR_P : Unterschied der beiden Widerstände hier wegen Temperatureinfluß ($\pm 0,1K$ in Öl)

δLin : Linearitätseinfluß des Messinstruments ist 1/10 der Meßunsicherheit

δAuf : Auflösung des Messinstruments

$\delta Verf$: Einflüsse durch das Verfahren; z.B: Anschlußtechnik

c: Sensitivitätskoeffizient - Ableitung der Modellgleichung nach allen Veränderlichen

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (2.74)$$

Für die Modellfunktion gilt:

$$R_P = R_N^{\#} * \frac{A_P}{A_N} - \delta R_P - \delta A_{R_0} + \delta Lin + \delta Auf + \delta Verf \quad (2.75)$$

$$\text{mit dem Normal: } R_N^{\#} = R_N + \delta u_{x1} + \delta u_{x2} \quad (2.76)$$

Für die Bestimmung der Sensitivitätskoeffizienten (c) muß die Gleichung (2.75) nach allen veränderlichen Variablen abgeleitet werden. Da sich in der Gleichung (2.76) für das Ergebnis der einzelnen Terme als Summe darstellt, kann für diese ein gemeinsamer Sensitivitätskoeffizient bestimmt werden, wie in der Messunsicherheitstabelle zu erkennen ist.

$$\frac{\partial R_P}{\partial R_N^{\#}} = \frac{A_P}{A_N} = c_1 \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial A_P} = R_N^{\#} * \frac{1}{A_N} = c_2 \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial A_N} = R_N^{\#} * \frac{-1 * A_P}{A_N^2} = c_3 \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial \delta R_P} = -1 = c_4 \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial \delta A_{R_0}} = -1 = c_5 \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial \delta Lin} = 1 = c_6 \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial \delta Auf} = 1 = c_7 \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial \delta Verf} = 1 = c_8 \quad (2.84)$$

Aus sechs Messungen von 100 Ohm mit HP3458 DVM wurden die folgenden Werte ermittelt.:

Nr.	A _N	A _P
1	100,002 07 Ohm	100,008 12 Ohm
2	100,002 09 Ohm	100,008 06 Ohm
3	100,002 05 Ohm	100,008 18 Ohm
4	100,002 11 Ohm	100,008 07 Ohm
5	100,002 00 Ohm	100,008 20 Ohm
6	100,002 01 Ohm	100,008 10 Ohm
Mittelwert:	100,002 055 Ohm	100,008 122 Ohm
rel. Std.abw.:	4,4*10⁻⁷	5,7*10⁻⁷

Der Wert des Normals beträgt:

R_N=100, 002 22 Ohm mit einer erweiterten Meßunsicherheit von U_{Kal} = 3*10⁻⁶.

$$u_{Kal} = \frac{U_{Kal}}{2} \quad (2.85)$$

Für die empirische Standardabweichung $s(\bar{X})$ des Mittelwerts, die aus n Messungen für einen arithmetischen Mittelwert \bar{X} ermittelt wurde und die Standardmessunsicherheit $u(\bar{X})$, gelten die folgenden Gleichungen.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} * \sum_{j=1}^n x_j \quad (2.86)$$

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} * \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} \quad (2.87)$$

$$u(\bar{x}) = s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} \quad (2.88)$$

Durch Einsetzen der Meßwerte in die Gleichungen für c_1 bis c_3 werden die Koeffizienten bestimmt. Für c_1 gilt zum Beispiel:

$$c_1 = \frac{100,008122 \text{ Ohm}}{100,002055 \text{ Ohm}} = 1,00006$$

Unsicherheitstabelle:

Größe (X_i)	Schätzwert (x_i)	Standardmeßunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitätskoeffizient c_i	Unsicherheitsbeitrag $u_{i(y)}$
R_N	100,002220hm	$3 * 10^{-6} / 2 * 100,0020hm$	Normal	$c_1 = 1,0$	$1,5 * 10^{-4} \text{ Ohm}$
δu_{x1}	0	$1,4 * 10^{-7} / \sqrt{3} * 100,002 \text{ Ohm}$	Recht.	$c_1 = 1,0$	$8,1 * 10^{-6} \text{ Ohm}$
δu_{x2}	0	$2 * 10^{-6} / \sqrt{3} * 100,002 \text{ Ohm}$	Recht.	$c_1 = 1,0$	$6,7 * 10^{-5} \text{ Ohm}$
A_P	100,008120hm	$5,7 * 10^{-7} / \sqrt{6} * 100,008 \text{ Ohm}$	Normal	$c_2 = 1,0$	$2,3 * 10^{-5} \text{ Ohm}$
A_N	100,002060hm	$4,4 * 10^{-7} / \sqrt{6} * 100,002 \text{ Ohm}$	Normal	$c_3 = -1,0$	$-1,8 * 10^{-5} \text{ Ohm}$
δR_P	0	$1,4 * 10^{-7} / \sqrt{3} * 100 \text{ Ohm}$	Recht.	$c_4 = -1$	$-8,1 * 10^{-6} \text{ Ohm}$
δA_{R0}	0	$0,00001 \text{ Ohm} / \sqrt{3}$	Recht.	$c_5 = -1$	$-5,8 * 10^{-6} \text{ Ohm}$
δLin	0	$1 * 10^{-6} / \sqrt{3} * 100 \text{ Ohm}$	Recht.	$c_6 = 1$	$5,8 * 10^{-5} \text{ Ohm}$
δAuf	0	$1 * 10^{-7} / \sqrt{6} * 100 \text{ Ohm}$	Dreieck	$c_7 = 1$	$4,1 * 10^{-6} \text{ Ohm}$
$\delta Verf$	0	$0,00001 \text{ Ohm} / \sqrt{3}$	Recht.	$c_8 = 1$	$5,8 * 10^{-6} \text{ Ohm}$
R_P	100,008290hm	-	-	-	$1,77 * 10^{-4} \text{ Ohm}$

$$U = k * \sqrt{\sum u_i^2(y)} \quad (2.89)$$

Erweiterte Meßunsicherheit mit $k=2$: $U=2*0,000 177 \text{ Ohm}=0,000 35 \text{ Ohm}$

Vollständiges Meßergebnis: $R_P=(100,008 29 \pm 0,000 35) \text{ Ohm}$

Die Auflösung (δAuf) für die zwei Messungen (A_P und A_N) mit Rechteckverteilung ergibt eine Dreieckverteilung mit $2*(5*10^{-8})$.

2.11.2 Direktmessung von Widerständen

Bei der Direktmessung wird der Widerstandswert eines Prüflings nach der Kurzschlusskalibrierung an dem Meßgerät bestimmt. Hierbei wirkt sich die eigene Messunsicherheit des Meßgerätes in erheblichem Maße auf die Gesamtmeßunsicherheit aus. Nach der Kurzschlusskalibrierung, ist aus sechs Anzeigen der Mittelwert 100,008122 Ohm mit einer relativen Standardabweichung von $5,7 \cdot 10^{-7}$ in einer Beispielmessung ermittelt worden.

$$R_P = A_P - \delta A_{R0} + \delta Dvm + \delta Auf + \delta Verf \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial A_P} = 1 = c_1 \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial \delta A_{R0}} = -1 = c_2 \quad (2.92)$$

Die Ergebnisse für die anderen Sensitivitätskoeffizienten werden ähnlich bestimmt.

Eine neue Abkürzung in der Modellgleichung lautet: δDvm und gibt die Meßunsicherheit des Meßgerätes (hier DVM) an.

Daraus folgt wieder eine Unsicherheitstabelle.

Größe (X_i)	Schätzwert (x_i)	Standardmeßunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitätskoeffizient c_i	Unsicherheitsbeitrag $U_{i(y)}$
A_P	100,00812 Ohm	$5,7 \cdot 10^{-7} / \sqrt{6} \cdot 100,008$ Ohm	Normal	$c_2 = 1,0$	$2,3 \cdot 10^{-5}$ Ohm
δA_{R0}	0	$0,00001$ Ohm/ $\sqrt{3}$	Recht.	$c_2 = -1$	$-5,8 \cdot 10^{-6}$ Ohm
δDvm	0	$17 \cdot 10^{-6} / \sqrt{3} \cdot 100$ Ohm	Recht.	$c_3 = 1$	$9,8 \cdot 10^{-4}$ Ohm
δAuf	0	$5 \cdot 10^{-8} / \sqrt{3} \cdot 100$ Ohm	Recht.	$c_4 = 1$	$2,9 \cdot 10^{-6}$ Ohm
$\delta Verf$	0	$0,00001$ Ohm/ $\sqrt{3}$	Recht.	$c_5 = 1$	$5,8 \cdot 10^{-6}$ Ohm
R_P	100,00812 Ohm	-	-	-	$9,80 \cdot 10^{-4}$ Ohm

Erweiterte Meßunsicherheit mit $k=2$: $U=2 \cdot 0,00098$ Ohm = $0,00196$ Ohm

Vollständiges Meßergebnis: $R_P = (100,000165 \pm 0,00196)$ Ohm

V:9.2022