

4. Spule

Eine Normalinduktivität (Spule) ist meistens eine Luftspule, die auf Grund ihrer Bauform eine große Langzeitstabilität besitzt und dessen Umweltverhalten und Alterung gering und bekannt sein sollte. Im Bereich von 50µH bis 10H stellt sie den induktiven Wechselstromwiderstand möglichst ideal und frequenzunabhängig dar.

4.1 Grundformeln

Zur Erinnerung werden die allgemeinen Formeln, die sich in jedem Lehrbuch finden nochmals dargestellt.

$$L = n * \frac{\Phi}{I} \left[\frac{V_S}{A} = H \right] \quad (4.1)$$

$$\underline{Z} = j\omega L = jX_L \quad (4.2)$$

$$X_L = \omega * L \quad (4.3)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (4.4)$$

Der Phasenwinkel zwischen Spannung und Strom beträgt 90 Grad. Die Spannung eilt hierbei dem Strom vor. X_L steigt mit steigender Frequenz. Die Reihenschaltung entspricht einer Addition der Einzelinduktivitäten. Der Verlustfaktor gibt das Verhältnis von Wirk- und Blindleistung in der Spule an, was auch durch die Güte Q beschrieben wird.

$$d = \tan \delta_L = \frac{P_{\text{wirk}}}{P_{\text{blind}}} = \frac{1}{Q_L} = \frac{\omega L}{R_P} = \frac{R_R}{\omega L} \quad (4.5)$$

$$L_{\text{reihe}} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n \quad (4.6)$$

Für die Energie in einer Spule und die negative Blindleistung gelten die Gleichungen 4.4 und 4.5.

$$W = \frac{1}{2} * L * I^2 \quad (4.7)$$

$$Q = -I^2 * X_L = -\frac{U^2}{X_L} \quad (4.8)$$

Im Wechselstromkreis bewirkt eine Stromänderung mit der Zeit in Verbindung mit der Induktivität eine Spannung.

$$u = L * \frac{di}{dt} \quad (4.9)$$

Für die Induktivität in der Bauform Zylinderspule einlagig, Koaxialleitung, Toroid (Ringspule) einlagig und Draht gegen Erde sind die folgenden Gleichungen näherungsweise gültig. A entspricht der eingeschlossenen Windungsfläche, l der Weglänge der Wicklung, N der Windungszahl, d dem Durchmesser und r dem Radius.

$$A = \pi * r^2 = \frac{\pi * d^2}{4} \quad \text{mit: } d=2r \quad (4.10)$$

$$L_{\text{Zylinder}} = N^2 * \frac{\mu * A}{l} \quad \text{mit: } l \gg r \quad (4.11)$$

$$L_{\text{Koax}} = l * \frac{\mu}{2\pi} * \left(\ln \frac{r_a}{r_i} + 0.25 \right) \quad (4.12)$$

$$L_{\text{Toroid}} = N^2 * \frac{\mu * A}{l} \quad (4.13) \quad \text{mit } l \text{ und } A \Rightarrow$$

$$L_{\text{Toroid}} = N^2 * \frac{\mu * \pi * r_A^2}{2 * \pi * r_m} = N^2 * \frac{\mu * r_A^2}{2 * r_m} \quad \text{mit: } r_m > r_A \quad (4.14)$$

Wenn man in Gleichung 4.14 μ_r zu eins setzt und μ_0 umrechnet, bekommt man eine vereinfachte Gleichung.

$$L_{\text{Toroid}} = N^2 * \frac{4 * \pi * 10^{-7} * \pi * r_A^2}{2 * \pi * r_m} = N^2 * \pi * \frac{d_A^2}{d_m} * 10^{-7} \quad \text{mit: } \mu_r = 1 \quad (4.15)$$

$$L_{\text{Toroid}} = N^2 * 3.14 * \frac{d_A^2}{d_m} \quad [\text{nH;cm}] \quad (4.16)$$

$$L_{\text{Draht}} = \frac{\mu_0 * l}{2 * \pi} * (\ln \frac{2 * l}{r} - 0.75) \quad \text{mit: } \mu_r = 1 \text{ und } l > 200 * r \quad (4.17)$$

Durch Einsetzen von μ_0 kann man eine Größengleichung erhalten.

$$L_{\text{Draht}} = 2 * l * (\ln \frac{2 * l}{r} - 0.75) \quad [\text{nH;cm}] \quad (4.18)$$

Mit $\mu_r = 1$ für kurze Leiterstücke gilt Gleichung 4.19 und bei sehr kurzen ($l < 60 * r$) 4.20. Für den Faktor k gilt: k=10 bei 0.5mm; k=8 bei d=1mm; k=6.5 bei d=2mm.

$$L_{\text{Draht}} \approx \frac{l}{2 * r} \quad [\text{nH}] \quad (4.19)$$

$$L_{\text{Draht}} \approx k * l \quad [\text{nH;cm}] \quad (4.20)$$

Beispiel: Zylinderspule ohne Eisenkern: $\mu_r = 1$; $N = 300$; $l = 30\text{cm}$; $d = 5\text{cm}$ mit Gl.4.11 =>

$$L_{\text{Zylinder}} = 300^2 * 1.257 * 10^{-6} * \frac{0.05^2 * \pi}{4 * 0.3} = 740 \mu\text{H}$$

Toroid ohne Eisen: $N = 96$; $d_A = 1\text{cm}$; $d_m = 5\text{cm}$ mit Gl. 4.16 => $L_{\text{Toroid}} = 96^2 * 3.14 * \frac{1^2}{5} = 5.79 \mu\text{H}$

Gerader Leiter: $l = 15\text{cm}$; $d = 2\text{mm}$ mit Gl. 4.18 => $L_{\text{Draht}} = 2 * 15 * (\ln \frac{2 * 150}{1} - 0.75) = 148.6 \text{nH}$

Spezialleiter $l = 1.7\text{cm}$; $d = 1.5\text{mm}$ mit Gl. 4.19 und 4.20 =>

$$L_{\text{Draht}} = \frac{17}{1.5} = 11.3 \text{nH} \quad \text{und} \quad L_{\text{Draht}} = 7 * 1.7 = 11.9 \text{nH}$$

Für den Drahtbügel, der an den Genrad Induktivitätsnormalen 1482 angebracht ist, läßt sich eine Induktivität von etwa 1nH abschätzen.

4.2 Material

Da Magnetkerne, die mit μ_r beschrieben werden, wegen ihrer Hysterese- und Magnetisierungskurven (B/H) ein unstabiles und unlineares Verhalten zeigen und auch sonst von vielen Einflüssen abhängig ist, sind sie für Normalinduktivitäten ungeeignet. Trotzdem werden sie für einfache Normale wegen ihrer kompakten Bauform gerne genommen. In der Praxis zeigt sich jedoch eine Abhängigkeit von der relativ geringen Meßspannung (<1.5V) und von der vorherigen Magnetisierung, da nicht bekannt ist, an welchem Arbeitspunkt der Magnetkurve gemessen wird. Eine Rückmagnetisierung in den Nullpunkt des B-H-Diagramms und Messung in der Neukurve kann diese Problem etwas verringern.

$$L \sim \mu_o * \mu_r \quad (4.21) \quad \mu_o = 4 * \pi * 10^{-7} [\frac{\text{H}}{\text{m}}] = 1.257 * 10^{-6}$$

$$\mu = \mu_r * \mu_o \quad (4.22) \quad \text{In Luft; Wasser gilt: } \mu_r = 1$$

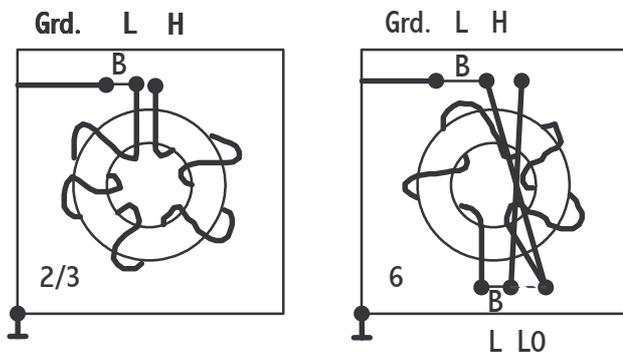
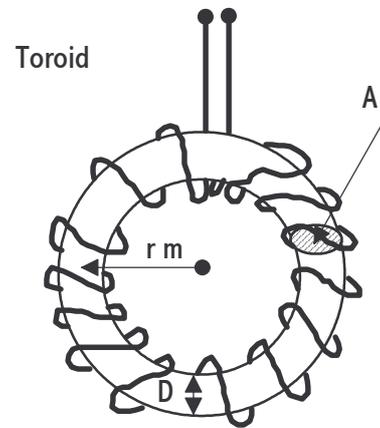
Stoff:	Eisen;Stahl	Permalloy	MU-Metall	Supermalloy	Kupfer;Silber;Glas
μ_r :	300	8000	20000	100000	1±0.00001

Das einzige Material, welches bei der Luftspule noch Einflüsse auf eine Änderung des Induktivitätswertes ausübt, sind die Kupferwicklungen. Sie zeigen eine Frequenz- und Temperaturabhängigkeit. Für Kupfer gelten die folgenden Konstanten.

$$\rho = 0.017 \left[\frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}} \right] \quad a_{20} = 4 \cdot 10^{-3} \left[\frac{1}{\text{K}} \right] \quad l_a = 16.6 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{K}} \right]$$

4.3 Aufbau

Wie oben erwähnt, handelt es sich bei der Normalspule um eine als Ringspule (Toroid) gewickelte Luftspule. Sie ist im Gegensatz zur bekannten Zylinderluftspule sehr streungsarm und auch selber unempfindlich gegen geringe äußere Magnetfelder und Eisengegenstände. Zur Abschirmung gegen elektrostatische Felder und zum mechanischen Schutz wird sie in einem Metallbehälter (z.B. Aluminium) eingebaut. Die Kupferwicklungen (N) aus Draht, Litze oder bei kleinen Werten (<5µH) Band werden auf einem unmagnetischen Keramikkörper gebracht. Der Keramikkörper zeigt keine radiale Temperaturexpansion und wird komplett gewickelt kräftefrei in einer Spezialmasse, zum Beispiel Kork-Kieselgel oder auch Gießharz, eingelagert. Um Luftfeuchtigkeitseinflüsse, die auch auf die Spezialmasse wirken kann, auszuschließen, wird alles im Aluminiumbehälter mit einer Verschlussmasse luftdicht verpackt. Bei diesen hier beschriebenen Aufbauformen handelt es sich um Niederfrequenzspulen mit maximal 100kHz Betriebsfrequenz. Man kann auch eine Vielzahl (>20) von Zylinderluftspulen in Reihe geschaltet so kreisförmig in einem Metallgehäuse anordnen, daß sie die oben beschriebene Wirkung einer echten Toroidwicklung erzielen. Es gibt auch einfache Normalinduktivitäten, die mit einer zylindrischen Luftspule (Solenoid), die empfindlich auf äußere Streufelder reagiert und selber erzeugt, aufgebaut werden. Die Stabilität einer Luftspule beträgt weniger als 0.01% pro Jahr, nach PTB 10ppm/J. Mit einer Spule mit Magnetkern ist dies nicht so gut zu erreichen, da sich die Permeabilität (μ_r) im Laufe der Zeit ändern kann. Der Verlustfaktor von Spulen ist im Vergleich zu Kapazitäten sehr hoch, da der Widerstand der Wicklungen und die Wicklungskapazitäten im Verhältnis zur Induktivität beträchtlich sind. Das führt zu einer niedrigen Resonanzfrequenz der Spulen, abhängig von ihren Werten. Die Anschlußtechnik ist 2- bzw.



3- oder 6-polig. Auf der Abbildung bedeutet L=LOW, H=HIGH, Grd.= Grund/Masse und B=Brücke. Die 6-polige Technik wird für Induktivitäten kleiner als 500µH verwandt, da eine Messung immer die Differenz zwischen einem Kurzschluß (L_0) und dem Meßwert L ist. Da bei kleinen Induktivitätswerten dieser Kurzschlußbezugswert einen größeren Einfluß auf die

Genauigkeit des Gesamtergebnisses darstellt, muß dieser mit beim Normal reproduzierbar vorhanden sein. Bei größeren Induktivitäten genügt jedoch ein Stück Draht zwischen L und H um eine Referenz zu bekommen. Je nach Größe des Induktivitätswerts liegt der Leitungswiderstand der Windungen bei zum Beispiel 0.1 Ohm (100 μ H) und 6.5 kOhm (10H). Dadurch ergibt sich bei großen Werten eine lange Zeitkonstante (1.6ms/1H) im Einschwingverhalten.

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (4.23)$$



Genrad Standard Inductor 1482 100mH

Die Güte Q bei 100 bis 1000 Hz beträgt für alle Werte etwa 1. Allgemein sind für die Verluste der Spule verantwortlich: a) Ohmscher Widerstand einschließlich des Skineffekts bei großen Frequenzen, b) Dielektrische Verluste durch die Eigenkapazität der Spule (Lackisolation der Windungen untereinander und zum Spulenkörper), c) Abstrahlungsverluste. Die Haupteffekte auf den Wert der Spule sind wie beim Kondensator Temperatur und Frequenz. Auf spezielle HF-Luftspulen und Gütenormale, die nicht in die Reihe der Normalinduktivitäten gehört, soll nur hingewiesen werden. Sie sind

in abgeschirmten Gehäusen untergebracht, mit zweipoliger Anschlußtechnik und bis in den GHz Bereich zu verwenden. Es gibt sowohl veränderliche Induktivitäten mit drehbarem Innenspulenteil, die nicht sehr genau sind, als auch schaltbare Induktivitätsdekaden, die üblicherweise mit Kernspulen bestückt sind und daher auch nicht an die Qualität der Luftspulen herankommen.

4.4 Temperatureinfluß

Die Abhängigkeit der Induktivität von der Temperatur ist bei eisenlosen Spulen nicht so groß wie bei Spulen mit Magnetkern. Die Temperaturerhöhung einer Spule hängt, wie beim Kondensator, von der äußeren Temperatur ab, aber wegen der großen Verluste tritt bei der Messung durch den Strom eine innere Eigenerwärmung auf. Es ist der Meßstrom daher gering zu wählen. Durch den Skineffekt im Draht (siehe Kap. 4.5) wird die Erwärmung auch noch frequenzabhängig. Zudem wird durch den Proximity-Effekt je nach Frequenz noch eine Erhöhung des Wirkwiderstandes bemerkbar. Ein höherer Wirkwiderstand bedeutet somit eine höhere Verlustleistung und so eine zusätzliche Erwärmung. So liegt der Temperaturkoeffizient zwischen $50 \cdot 10^{-6}/K$ und $30 \cdot 10^{-6}/K$ (GR1482). Es gelten dann für den Gleichspannungswiderstand und die Induktivität die folgenden Gleichungen.

$$R_T = R_{20} * (1 + a_{20} * (T - T_{20})) \quad (4.24)$$

$$L_T = L_{20} * (1 + a_{20} * (T - T_{20})) \quad (4.25)$$

Es kann somit über den Gleichspannungswiderstand eine Aussage über die innere Temperatur der Spulenwicklungen gemacht werden. Die Induktivität ist deshalb temperaturabhängig, da sich wegen der Längenänderung des Drahtes die Wirkfläche A im Toroid vergrößert und

somit die Induktivität L größer wird. Zudem ist auch die Eigenkapazität der Spule noch leicht wegen ähnlicher Vorgänge temperaturabhängig.

$$a_{20} = a_L + \omega^2 * C_S * L * a_C \quad (4.26)$$

Der Temperaturkoeffizient a_L der Spule ist proportional der Flächenänderung und entspricht etwa dem zweifachen Längenausdehnungskoeffizienten des Kupfers. Mit A =Fläche und U =Umfang beim Toroid gilt:

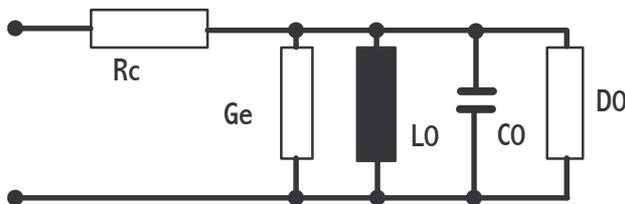
$$\frac{\Delta L}{L} \sim \frac{\Delta A}{A} = 2 * \frac{\Delta U}{U} \quad (4.27)$$

Der Temperaturkoeffizient a_C der Eigenkapazität beträgt etwa 0.3%/K. Der a_C ist nur für Induktivitäten größer als 1H und Frequenzen über 1kHz interessant.

Beispiel aus Specs. von Genrad 1482: Für die Meßleistung 200mW(3W) => Temperaturerhöhung 1.5°C(20°C). Für den Temperaturkoeffizient: $a_L = (27 [10H] \text{ bis } 44[100\mu H]) * 10^{-6} 1/K$
Eine 1% Widerstandsänderung entspricht einer Temperaturerhöhung um 2.54°C und einer Induktivitätsänderung um 76ppm.

4.5 Frequenzabhängigkeit

Nicht nur der Induktivitätswert ist sehr stark frequenzabhängig, sondern auch der Verlustfaktor ($D=1-Q$). Durch die niedrigen Resonanzfrequenzen der verschiedenen Werte macht sich ein Induktivitätsanstieg schon bei kleineren Frequenzen, je größer die Induktivität desto niedriger die Resonanzfrequenz, bemerkbar. Der Verlustfaktor hat einen in allen Frequenzen stark unlinearen Verlauf. Die Eigenkapazität einer Spule ist für den Induktivitätsverlauf die entscheidende Mitbestimmungsgröße. Ähnlich wie beim Widerstand, kann man unter Umständen durch geschickte Wickeltechniken und Auswahl der Trägerstoffe und Drahtlacke diese störende Kapazität verringern. Allgemein ist zu sagen, daß es sich bei den hier besprochenen Induktivitäten nicht um Hochfrequenzspulen handelt und kein Kernmaterial vorhanden ist. Entsprechend groß sind auch Gewicht etwa 5kg und Abmaße 17*17*20 cm. Es läßt sich ein allgemeines Ersatzschaltbild für eine solche Spule finden. R_C stellt den Widerstand von Leitung und Spule dar. G_E ist die Gegensebstinduktion und D_0 sind die dielektrischen Verluste. L_0 beschreibt die Induktivität und mit C_0 wird die dazu passende Eigenkapazität (25pF bis 250pF) angegeben. Für die Frequenzabhängigkeit der Induktivität gilt in diesem Fall bei Vernachlässigung der realen Anteile (R).



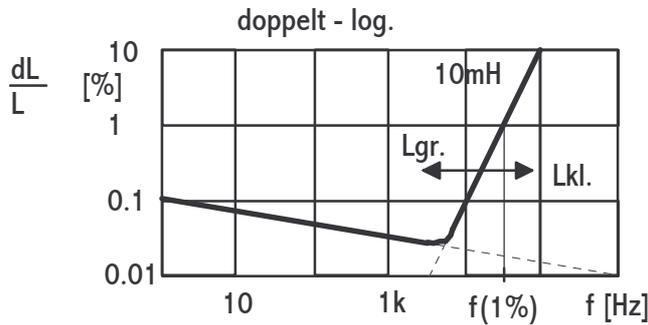
ste. L_0 beschreibt die Induktivität und mit C_0 wird die dazu passende Eigenkapazität (25pF bis 250pF) angegeben. Für die Frequenzabhängigkeit der Induktivität gilt in diesem Fall bei Vernachlässigung der realen Anteile (R).

$$Z = j\omega L(\omega) = \frac{j\omega L_0 * \frac{1}{j\omega C_0}}{j\omega L_0 + \frac{1}{j\omega C_0}} \Rightarrow \omega L(\omega) = \frac{\omega L_0}{-\omega C_0 * (\omega L_0 - \frac{1}{\omega C_0})}$$

$$L(\omega) = \frac{L_0}{-\omega^2 C_0 L_0 + 1} \Rightarrow \omega^2 L_0 C_0 = 1 - \frac{L_0}{L(\omega)} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta L}{L_0} \sim \frac{L(\omega) - L_0}{L(\omega)} = \omega^2 C_0 L_0 = \left(\frac{f}{f_r}\right)^2 \quad (4.28) \quad \text{mit } \omega_r^2 C_0 L_0 = 1 \text{ bei Resonanz}$$

$$L(\omega) = \frac{L_0}{1 - \omega^2 C_0 L_0} = \frac{L_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2} \quad (4.29)$$



Gleichung 4.28 beschreibt sehr gut den durch Messungen ermittelten Frequenzgang von Induktivitätswerten der Genrad 1482 Bauform. Index r bedeutet Resonanz.

$$f_{1\%} \sim 1/10 * f_r \quad (4.30)$$

$$\frac{\Delta L}{L_0} [\%] \approx \left(\frac{f}{f_r}\right)^2 * 100 \quad (4.31)$$

Über die Resonanzfrequenz oder mit Gleichung 4.30, die für den 1% Abweichungswert gilt, lässt sich dann

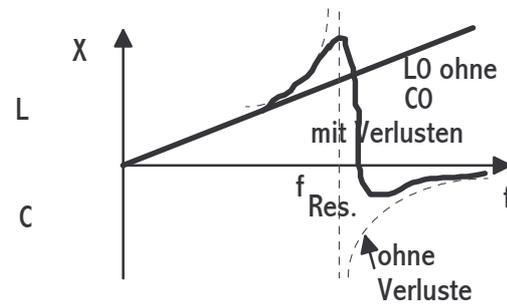
über Gl. 4.32 die Kapazität C₀ berechnen.

$$C_0 = \frac{1}{(2\pi f_r)^2 * L_0} \quad (4.32)$$

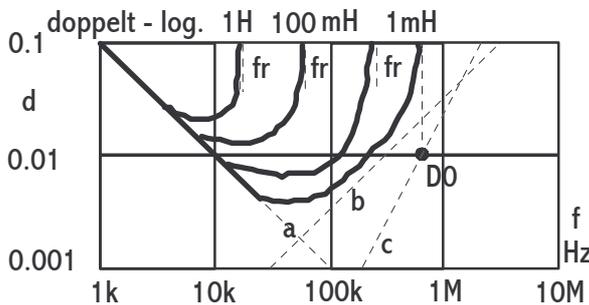
Die jährliche Eigenkapazitätsänderung bei Genrad Induktivitäten beträgt nach PTB Messungen 0,08 bis 0,15 pF/Jahr. Weitere Fixpunkte für die Änderung sind 0.1% bei f_r/32 und 5% bei f_r/5.

Der Verlustfaktor setzt sich aus drei frequenzabhängigen Termen zusammen. In Gleichung 4.33 sind dies bei der Luftspule Resonanzfaktor *(Widerstandsverluste + Wirbelstromverluste + Dielektrizitätsverluste [C₀]). Gl. 4.33 gilt allgemein.

$$d \approx \frac{1}{1 - (f/f_r)^2} * \left(\frac{R_C}{\omega L_0} + G_E * \omega L_0 + \left(\frac{f}{f_r}\right)^2 * d_0 \right) \quad (4.33)$$



Für die Abbildung gilt aus Gl. 4.33 d=F*(a+b+c). Bei Spulen mit Eisenkern wird zwar d_c und d₀ kleiner, aber durch das magnetische Material kommen drei neue Terme hinzu, das sind Wirbelströme im Kern, Hystereseverluste und zusätzliche kleinere konstante Verluste. Besonders störend macht sich bei Leitern der Skineffekt als eine Änderung des Widerstandes und der inneren Induktivität im schnellen Wechselfeld bemerkbar. Wechselströme, die nach dem Induktionsgesetz mit den magnetischen Induktionslinien verkettet sind, nennt man Wirbelströme. In stromführenden Leitern überlagern sich die Wirbelströme mit dem Leiterstrom. Durch die Überlagerung der verschiedenen Ströme und Magnetfeldern im Leiter kommt es zu einer Stromverdrängung zum Rand des Leiters hin, die man als



Skineffekt bezeichnet. Da von der Gesamtinduktivität des Leiters der Anteil der inneren Induktivität mit der Frequenz kleiner wird, nimmt die Gesamtinduktivität ab. Diese Differenz zwischen Nieder- und Hochfrequenzinduktivität liegt zwischen 2% und 6%. Da der Sachverhalt mathematisch kompliziert ist und erst ab Frequenzen von 40 kHz zum Tragen kommt, wird hier deshalb darauf nicht genauer eingegangen. Bei diesen Frequenzen ist nämlich bei

Skineffekt bezeichnet. Da von der Gesamtinduktivität des Leiters der Anteil der inneren Induktivität mit der Frequenz kleiner wird, nimmt die Gesamtinduktivität ab. Diese Differenz zwischen Nieder- und Hochfrequenzinduktivität liegt zwischen 2% und 6%. Da der Sachverhalt mathematisch kompliziert ist und erst ab Frequenzen von 40 kHz zum Tragen kommt, wird hier deshalb darauf nicht genauer eingegangen. Bei diesen Frequenzen ist nämlich bei

den hier betrachteten Induktivitäten der Einfluß (Induktivitätsanstieg) auf Grund der Resonanzfrequenz wesentlich größer.

Die Baureihe 1482 (20cm/5.5kg/0,1%) für Normalinduktivitäten der Firma Genrad, die auf diesem Gebiet für niederfrequente Luftspulen führend ist, wird nun in einer Tabelle vorgestellt.

Nennwert	f_r [kHz]	C_0 [pF]	R_C [Ohm]	$I_{0,2W}$ [mA]	Typ
50 μ H	3100		0,039	2260	A
100 μ H	2250	50	0,083	1550	B
200 μ H	1400		0,15	1150	C
500 μ H	960		0,38	725	D
1 mH	800	40	0.84	490	E
2 mH	580		1,52	360	F
5 mH	320		3,8	230	G
10 mH	220	52	8,2	156	H
20 mH	145		14,5	117	J
50 mH	84		36,8	74	K
100 mH	71	50	81	50	L
200 mH	39		109	43	M
500 mH	24,5		280	27	N
1 H	14,6	120	616	18	P
2 H	10,6		1125	13,3	Q
5 H	6,8		2920	8,3	R
10H	4.9	105	6400	5.6	T

Die Firma Genrad gibt es nicht mehr, jedoch werden genau die selben Bauarten von einem Nachfolgeunternehmen (JET) hergestellt. Da der Bedarf von Normalinduktivitäten nicht sonderlich groß ist und diese auch mittlerweile gebraucht angeboten werden, findet man die folgenden Induktivitäten oft nur noch in alten Laboratorien in Gebrauch.

Die Firma Tettex stellt Luftspulen mit ähnlichen Eigenschaften und Aufbau wie die von Genrad her. Die Genauigkeit dieser Typen 3400 beträgt 0.02%.

Nennwert	f_r [kHz]	C_0 [pF]	R_C [Ohm]	I_{max} [mA]	Typ
100 μ H	4500	12,5	0,75	2000	3401
1 mH	850	35	3,5	800	3402
10 mH	220	53	25	300	3403
100 mH	90	31	130	150	3404
1 H	30	28	1600	50	3405

Von der Firma Yokogawa / Hewlett Packard gibt es große Einzelinduktivitäten (Typ SI) von 1mH, 10mH und 100mH mit einer Unsicherheit bei 1kHz von etwa 0,2%.

Auch die Firma Felten und Guillaume baute große schwarze runde „Töpfe“ mit Metallgehäuse mit den dekadischen Werten von 100 μ H bis 1H. Die Qualität und die Daten sind mit den von Genrad zu vergleichen.

Vom VEB Funkwerk-Erfurt gibt es verschiedene Bauformen von Normalinduktivitäten zwischen $1\mu\text{H}$ und 10H . Diese werden in der folgenden Tabelle vorgestellt.

Nennwert	C_0 [pF]	R_C [Ohm]	I_{\max} [mA]	Uns. \pm	Typ
10 mH	50	13	50	0,1%	0021
100 mH	52	55	50	0,1%	0021
1 H	78	420	50	0,1%	0021
1 μH	10		10	1%+0,3 μH	0020
10 μH	12		10	1%+0,3 μH	0020
100 μH	13		10	1%+0,3 μH	0020
1 mH	18		10	1%+0,3 μH	0020
10 mH	22		10	1%+0,3 μH	0020
10 mH	65		500	1%	0187
100 mH	60		150	1%	0187
1 H	60		120	1%	0187
10 H	50		30	1%	0187
100 mH	55		200	1%	0204
1 H	80		50	1%	0204
0,1 mH bis 100 mH				2%+5 μH	0199

Die Frequenzgänge und die Eigenschaften des Typs 0021 ähneln denen von Genrad. Die Normale sind aus 10 beziehungsweise 18 kreisförmig angeordneten Einzelspulen aufgebaut. Die einzelnen Spulen sind mit HF-Litze gewickelt und in Gießharz gegossen. Das runde Gehäuse der Induktivitäten besteht aus Aluminium und hat einen Durchmesser von 22cm bis 37cm.

Die Induktivitäten aus der ehemaligen DDR oder USSR vom Typ P596 haben einen Spulenkörper, welcher der Form nach einer toroidalen Spule ähnlich ist. Das Gehäuse aus Silumin (Aluminium-Silizium-Magnesium-Legierung) dient als Schirm des Normals. Es gibt unter 1mH sechs Anschlußklemmen und darüber drei Stück. Abmessungen und Aufbau erinnern stark an das Genrad 1482 Normal.

Nennwert	C_0 [pF]	R_C [Ohm]	I_{\max} [mA]	Uns. \pm	Typ
1 μH		0,1	1000	5%	P596
10 μH		0,1	500	0,5%	P596
100 μH		0,3	100	0,1%	P596
1 mH		8	100	0,05%	P596
10 mH		15	100	0,05%	P596
100 mH		200	10	0,05%	P596
1 H		800	10	0,05%	P596

Die Firma Genrad stellt auch eine Induktivitätsdekade vom Typ 1491 her, die aus Einheiten des Einzel-Decadentyps 940 aufgebaut ist. Wegen ihres Metallkerns (molybdenum-permalloy) ist sie meßstromabhängig (0.2% bis 1% und mehr). Die Grundgenauigkeit liegt zwischen 2% bei $100\mu\text{H}$ und 0,6% bei 10H . Die 1% Induktivitätsänderungsfrequenz für den Frequenzgang, linear ansteigend im doppelt-log. Diagramm, ist 1kHz bei 10H und steigt an auf 200kHz bei $100\mu\text{H}$. Der Temperaturkoeffizient beträgt $-25\text{ppm}/^\circ\text{C}$ und der

Gleichstromwiderstand 450 Ohm je Henry. Die maximale frequenzabhängige Güte liegt bei 200. Ein gemessener Induktivitätswert ist über Korrekturkurven für den Strom und die Frequenz des Herstellers umrechenbar.

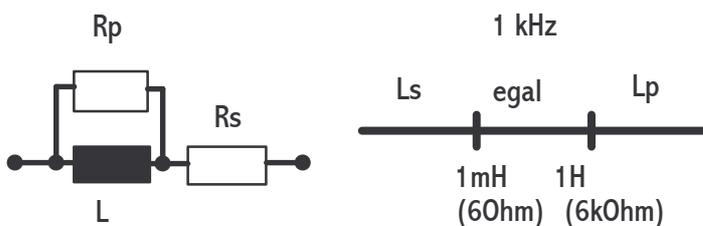
Wie bei den Luftspulen gilt allgemein für den Frequenzgang, Erhöhung der Frequenz um etwa den Faktor 3 (10) entspricht einer relativen Induktivitätsänderung um den Faktor 10 (100). Mit einem Beispiel: 1kHz(0.01%) => 3kHz(0.1%) => 10kHz(1%).

Drei einfache Induktivitätsdekaden mit 2% Grundgenauigkeit werden auch von der Firma Siemens mit Eisenkern zwischen 50Hz und 15kHz im Bereich 1mH bis 1H (LD11, 22, 33) angeboten. Die Güte liegt bei 250, die Parallelkapazität bei 100pF und der Serienwiderstand bei 0,5 Ohm bis 500 Ohm.

Auch Danbridge liefert eine vierstufige Dekade (DI 4) zwischen 1mH und 10H mit einem TK von 100ppm/°C. Die Spulen sind auf Ferritkerne gedreht, stromabhängig und werden mit einer Unsicherheit von 1% bis 0,5% angegeben. Eine dreistufige Dekade (DI 3A) aus Luftspulen von 1mH bis 1H und einer Unsicherheit von 2% bis 1% ist auch vorhanden. Die Gleichstromwiderstände liegen zwischen 1 Ohm und 400 Ohm und die Resonanzfrequenzen je nach Dekade bei 25kHz, 60kHz und 170kHz.

4.6 Messung

Wir messen die gerade vorgestellten Luftspulen immer in Serienschaltung. Allgemein jedoch gilt, Serienschaltbild, wenn L klein ist und so der Serienwiderstand der Wicklung signifikant ist. Die gilt besonders bei großen Spulen ohne Eisenkern. Das Parallelschaltbild wird angewendet, wenn L groß ist und der Parallelverlustwiderstand den Meßwert beeinflusst. Für 1kHz kann man mit der folgenden Anschauung leben. Bei Spulen mit Kern soll der Meßstrom klein sein, damit das Kernmaterial nicht in die Sättigung kommt. Die Induktivität nimmt dann ab. Es macht sich dann aber die Hysterese stark bemerkbar. Auf jeden Fall muß der Kern vorher entmagnetisiert werden, indem man einem hohen Wechselstrom langsam gegen Null regelt, um so eine Messung in der Neukurve durchzuführen. Der



Meßstrom wird auf jeden Fall bei Prüfungen mit angegeben, da besonders die Eisenkernspulen eine sehr große Stromabhängigkeit zeigen. Auch sind überlagerte Gleichströme störend auf den Induktivitätswert.

Große Induktivitäten mit Parallelkapazität wirken wie eine Kapazität. Allgemein ist die Induktivität eines Normals die Differenz zwischen einem Kurzschluß (L_0) und dem Meßwert L_M , dies entspricht einer Serienschaltung von beiden Größen.

$$L_W = L_M - L_0 \quad (4.34)$$

Wie in 4.3 zu sehen sind die Induktivitäten von Genrad (1482) für eine solche Differenzmessung bei kleinen Werten unter 500µH vorbereitet. Als Kurzschluß für die 3-poligen Induktivitäten genügt ein Kurzschlußbügel mit etwa 15nH. Kleine Induktivitäten sollten bei großen Frequenzen und große bei kleinen Frequenzen überprüft werden. Nur hier ist ein relativ günstiger Frequenzgang mit nicht zu kleinem komplexen Widerstandswert zu erwarten. Das bedeutet, daß f_{Max} kleiner als $f_{1\%}$ sein sollte und bei 100µH die untere Grenze bei 120 Hz liegt.

4.7 Meßunsicherheitsberechnung

Es gibt zwei Meßverfahren bei der Messung von Induktivitäten, die mit ihren Unsicherheitsberechnungen vorgestellt werden.

4.7.1 Substitutionsmessung von Induktivitäten

Bei der Substitutionsmessung werden die beiden Anzeigewerte von Normal und Prüfling mit dem Normalwert zum Wert der Prüflingsinduktivität berechnet.

$$L_P = L_N * \frac{A_P - A_{Po}}{A_N - A_{No}} \quad (4.35)$$

Zu Gl. 4.35: Mit allgemein: $L_P = A_P * MB$ und $L_N = A_N * MB$ für die beiden Messungen mit $MB = \text{Meß-Brücken-Faktor}$. MB ist für beide Messungen konstant anzusetzen, da Induktivitäten gleichen Nennwerts verglichen werden. $MB = L_N / A_N$ in Gleichung für L_P eingesetzt ergibt: $L_P = L_N * A_P / A_N$.

Eine elektronische Messbrücke wird hierbei als Übertragungsnorm verwendet. Die Meßunsicherheit wird geringer als bei der Direktmessung und hängt stark von der Meßunsicherheit des Normals ab.

Bei einer Substitutionsmessung wird normalerweise abwechselnd Normal und Prüfling an die Meßbrücke angeschlossen, ohne dabei die Einstellungen der Brücke zu verändern. Dies wäre bei der Anzahl der Frequenzpunkte bis zu sieben Stück nicht sehr effektiv. Daher werden je Induktivität alle Frequenzpunkte in einem Durchgang angefahren. Es ließ sich durch Vergleichsmessung nachweisen, dass dies keine Probleme schafft, weil die Messungen direkt hintereinander durchgeführt werden und Stabilität und Reproduzierbarkeit der Meßbrücke hinreichend gut sind.

Zur Berechnung des Meßergebnisses und Bestimmung der Meßunsicherheit wird die Modellgleichung benötigt. In der Modellgleichung wird nicht nur die Berechnung der Meßunsicherheit aufgestellt, sondern auch gleichzeitig die Berechnung des Meßwertes. Die einzelnen Terme erscheinen dann in einer Gesamttabelle mit ihren Zahlenwerten.

So gilt für die Modellgleichung bei Substitutionsmessung:

$$\text{Meßergebnis des Prüflings} = \text{Normalwert} \otimes \text{Anzeigeverhältnis} \oplus \text{Unsicherheitsterme } (\delta_X)$$

Der Normalwert wiederum setzt sich aus dem eigentlichen Wert des Normals und den zugehörigen Meßunsicherheitsanteilen zusammen. Es gelten die folgenden Abkürzungen:

- L_P : Meßergebnis des Prüflings; Ergebnis der Messung mit Berechnung
- L_N : Wert des Induktivitätsnormals; Extern kalibriert (z.B. bei der PTB)
diese Variable beinhaltet auch die eigene Meßunsicherheit
- $L_N^\#$: Gesamtgleichung für das Induktivitätsnormal mit Meßunsicherheiten
- δu_{x2} : Abgeschätzte zeitliche Inkonzanz, die sich aus der Drift (Alterung) über 5 Jahre ergibt, wird über die festgelegte Jahresperiode anhand früheren Messungen ermittelt.
- δu_{x3} : Temperatureinfluß auf das Normal. Er ergibt sich aus den Umgebungstemperaturschwankungen von $\pm 1\text{K}$ (Bezugswert 23°C). Mit $=kt * dT = kt$ da $dT = \pm 1\text{K}$. Hierbei ist kt der Temperaturkoeffizient der Induktivität.
- δu_{x4} : Abgeschätzte irreversible Änderungen
- δu_{x5} : Sonstige Einflüsse - nur bei 40kHz; wegen Interpolation
- A_N : Anzeigewert bei der Messung des Normals

- A_{No} : Anzeigewert bei der Messung von L_0 des Normal
 A_P : Anzeigewert bei der Messung des Prüflings
 A_{Po} : Anzeigewert bei der Messung von L_0 des Prüflings
 δL_P : Unterschied der beiden Induktivitäten hier wegen Temperatureinfluß $\pm 0,1K$
 δL_0 : Anteil durch unterschiedliche Nullinduktivitätseinflüsse
 bei 3-poligen Induktivitäten wird L_0 nicht gemessen
 δLin : Linearitätseinfluß der LCR-Meßbrücke ist 1/10 der Meßunsicherheit
 δAuf : Auflösung des LCR-Meters für beide Messungen
 δAns : Einflüsse durch die Anschlußtechnik
 c : Sensitivitätskoeffizient (Ableitung der Modellgleichung nach allen
 Veränderlichen)

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (4.36)$$

Für die Modellfunktion gilt:

$$L_P = L_N^{\#} * \left(\frac{A_P - A_{Po}}{A_N - A_{No}} \right) - \delta L_P - \delta L_0 + \delta Lin + \delta Auf + \delta Ans \quad (4.37)$$

$$\text{mit dem Normal: } L_N^{\#} = L_N + \delta u_{x2} + \delta u_{x3} + \delta u_{x4} + \delta u_{x5} \quad (4.38)$$

Für die Bestimmung der Sensitivitätskoeffizienten (c) muß die Gleichung (4.37) nach allen veränderlichen Variablen abgeleitet werden. Da sich in der Gleichung (4.38) für das Ergebnis der einzelnen Terme als Summe darstellt, kann für diese ein gemeinsamer Sensitivitätskoeffizient bestimmt werden, wie in Tabelle 1 und 2 zu erkennen ist.

$$\frac{\partial L_P}{\partial L_N^{\#}} = \frac{A_P - A_{Po}}{A_N - A_{No}} = c_1 \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial A_P} = L_N^{\#} * \frac{1}{A_N - A_{No}} = c_2 \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial A_{Po}} = L_N^{\#} * \frac{-1}{A_N - A_{No}} = c_3 \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial A_N} = L_N^{\#} * \frac{-1 * (A_P - A_{Po})}{(A_N - A_{No})^2} = c_4 \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial A_{No}} = L_N^{\#} * \frac{A_P - A_{Po}}{(A_N - A_{No})^2} = c_5 \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial \delta L_P} = -1 = c_6 \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial \delta L_0} = -1 = c_7 \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial \delta Lin} = 1 = c_8 \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial \delta Auf} = 1 = c_9 \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial \delta Ans} = 1 = c_{10} \quad (4.48)$$

Aus sechs Messungen von $100\mu\text{H}$ wurden beispielsweise die folgenden Werte ermittelt.:

Nr.	A_N	A_P
1	99,8217 μH	99,9762 μH
2	99,8293 μH	99,9785 μH
3	99,8252 μH	99,9746 μH
4	99,8240 μH	99,9703 μH
5	99,8206 μH	99,9764 μH
6	99,8268 μH	99,9735 μH
Mittelwert:	99,8246 μH	99,9749 μH
rel. Std.abw.:	$3,23 \cdot 10^{-5}$	$2,83 \cdot 10^{-5}$

Für die Nullinduktivitäten wurde ermittelt:

$$A_{P0}=0,180 \mu\text{H} \quad \text{und} \quad A_{N0}=0,165 \mu\text{H}.$$

Der Wert des Normals beträgt:

$L_N=99,838 \mu\text{H}$ mit einer erweiterten Meßunsicherheit von $U_{Kal}=0,02\%$.

$$u_{Kal} = \frac{U_{Kal}}{2} \quad (4.49)$$

Für die empirische Standardabweichung $s(\bar{X})$ des Mittelwerts, die aus n Messungen für einen arithmetischen Mittelwert \bar{X} ermittelt wurde und die Standardmessunsicherheit $u(\bar{X})$, gelten die folgenden Gleichungen.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} * \sum_{j=1}^n x_j \quad (4.50)$$

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} * \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} \quad (4.51)$$

$$u(\bar{x}) = s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} \quad (4.52)$$

Durch Einsetzen der Meßwerte in die Gleichungen für c_1 bis c_5 werden die Koeffizienten bestimmt. Für c_1 gilt zum Beispiel:

$$c_1 = \frac{(99,9749-0,180)\mu\text{H}}{(99,8246-0,165)\mu\text{H}} = 1,00136$$

Die weiteren Berechnungen für c_2 bis c_5 ergeben:

$c_2=1,00179$; $c_3=-1,00179$; $c_4=-1,00315$; $c_5=1,00315$

Bei der Fehlerberechnung in der nachstehenden Tabelle wird der Sensitivitätskoeffizient nur noch mit einer Stelle hinter dem Komma angegeben. Daher wird er gerundet auch in vielen anderen Standardfällen zu eins.

Tabelle 1

Größe (X_i)	Schätzwert (x_i)	Standardmeßunsicherheit $u(x_i)$	Ver- teilung	Sensitivitäts- koeffizient c_i	Unsicherheits- beitrag $u_{i(y)}$
L_N	99,838 μH	$2 \cdot 10^{-4} / 2 \cdot 99,838 \mu\text{H}$	Normal	$c_1 = 1,0$	0,00998 μH
δu_{X2}	0	$6 \cdot 10^{-5} / \sqrt{3} \cdot 99,838 \mu\text{H}$	Recht.	$c_1 = 1,0$	0,00346 μH
δu_{X3}	0	$5 \cdot 10^{-5} / \sqrt{3} \cdot 99,838 \mu\text{H}$	Recht.	$c_1 = 1,0$	0,00288 μH
δu_{X4}	0	$2 \cdot 10^{-5} / \sqrt{3} \cdot 99,838 \mu\text{H}$	Recht.	$c_1 = 1,0$	0,00115 μH
δu_{X5}	0	0	Recht.	$c_1 = 1,0$	0
A_P	99,9749 μH	$2,83 \cdot 10^{-5} / \sqrt{6} \cdot 99,9749 \mu\text{H}$	Normal	$c_2 = 1,0$	0,00116 μH
A_{P0}	0,180 μH	$0,01 \mu\text{H} / \sqrt{3}$	Recht.	$c_3 = -1,0$	-0,00577 μH
A_N	99,8246 μH	$3,23 \cdot 10^{-5} / \sqrt{6} \cdot 99,8246 \mu\text{H}$	Normal	$c_4 = -1,0$	-0,00132 μH
A_{N0}	0,165 μH	$0,01 \mu\text{H} / \sqrt{3}$	Recht.	$c_5 = 1,0$	0,00577 μH
δL_P	0	$5 \cdot 10^{-6} / \sqrt{3} \cdot 99,9 \mu\text{H}$	Recht.	$c_6 = -1$	-0,00028 μH
δL_0	0	$0,002 \mu\text{H} / \sqrt{3}$	Recht.	$c_7 = -1$	-0,00115 μH
δL_{in}	0	$1 \cdot 10^{-4} / \sqrt{3} \cdot 99,9 \mu\text{H}$	Recht.	$c_8 = 1$	0,00577 μH
δAuf	0	$1 \cdot 10^{-5} / \sqrt{6} \cdot 99,9 \mu\text{H}$	Dreieck	$c_9 = 1$	0,00040 μH
δAns	0	$0,001 \mu\text{H} / \sqrt{3}$	Recht.	$c_{10} = 1$	0,00058 μH
L_P	99,9735 μH	-	-	-	0,0150 μH

$$U = k * \sqrt{\sum u_i^2(y)} \quad (4.53)$$

Erweiterte Meßunsicherheit mit $k=2$: $U=2 \cdot 0,0150 \mu\text{H}=0,0300 \mu\text{H}$

Vollständiges Meßergebnis: $L_P=(99,9735 \pm 0,0300) \mu\text{H}$

Der Wert $99,9 \mu\text{H} = (99,97 \mu\text{H} + 99,82 \mu\text{H}) / 2$ bei $u(x_i)$ ist der Mittelwert der Anzeigen A_P und A_N . Die Auflösung (δAuf) für die zwei Messungen (A_P und A_N) mit Rechteckverteilung ergibt eine Dreieckverteilung mit $2 \cdot (5 \cdot 10^{-6})$.

Für A_P und A_N größer als 200mH kann bei Vergleich ähnlicher Typen die Messung der Nullinduktivität wegfallen. Dann gilt $A_{P0}=0$, $A_{N0}=0$ und die Messunsicherheiten auch vom Term δL_0 werden gestrichen.

4.7.2 Direktmessung von Induktivitäten

Bei der Direktmessung wird der Induktivitätswert eines Prüflings nach der Short-Open Kalibrierung an der Meßbrücke bestimmt. Hierbei wirkt sich die eigene Messunsicherheit der Meßbrücke in erheblichem Maße auf die Gesamtmeßunsicherheit aus.

$$L_P = A_P - A_{P0} + \delta L_{cr} + \delta Auf + \delta Ans \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial A_P} = 1 = c_1 \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial A_{P_0}} = -1 = c_2 \quad (4.56)$$

Die Ergebnisse für die anderen Sensitivitätskoeffizienten werden ähnlich bestimmt. Eine neue Abkürzung in der Modellgleichung lautet: δLCR und gibt die Meßunsicherheit der Meßbrücke an.

Tabelle 2

Größe (X_i)	Schätzwert (x_i)	Standardmeßunsicherheit $u(x_i)$	Ver- teilung	Sensitivitäts- koeffizient c_i	Unsicherheits- beitrag $u_{i(y)}$
A_P	99,99987 mH	$1,5 \cdot 10^{-6}/\sqrt{6} \cdot 99,99987$ mH	Normal	$c_1 = 1$	0,000061 mH
A_{P_0}	0	$0,02 \mu\text{H}/\sqrt{3}$	Recht.	$c_2 = -1$	$-0,000012 \mu\text{H}$
δLCR	0	$5 \cdot 10^{-4}/\sqrt{3} \cdot 100$ mH	Recht.	$c_3 = 1$	0,0288 mH
δAuf	0	$5 \cdot 10^{-6}/\sqrt{3} \cdot 100$ mH	Recht.	$c_4 = 1$	0,000289 mH
δAns	0	$0,001 \mu\text{H}/\sqrt{3}$	Recht.	$c_5 = 1$	$8,5 \cdot 10^{-7}$ mH
L_P	99,99987 mH	-	-	-	0,0288 mH

Erweiterte Meßunsicherheit mit $k=2$: $U=0,0576$ mH

Vollständiges Meßergebnis: $(99,9999 \pm 0,0576)$ mH

Wenn man mit einem Normal eine Messbrücke kalibriert, wird eine Direktmessung durchgeführt. Dabei sollte das Ergebnis L_P im Wert dem des Normal mit L_N entsprechen. Für die Abweichung der Messbrücke gilt: $dM_b = L_P - L_N$

V:1.2017